Examen du 5 janvier 2012, "Courbes et surfaces"

(CS3, option L2 – Université Diderot Paris 7)

Exercice 1 On considère un morceau de ficelle de longueur L. Comment doit-on disposer la ficelle dans le quadrant supérieur droit du plan, en mettant une extrémité sur le demi-axe des $x > 0$ et l'autre extrémité sur le demi-axe des $y > 0$, de sorte que le domaine délimité par la ficelle et les axes de coordonnées soit d'aire maximale ? Quelle aire obtient-on ?

Exercice 2 On définit une courbe plane paramétrée :

$$M(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

a) Déterminer les points où le paramétrage est régulier.

b) Calculer la longueur de la courbe définie par $M : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$.

Exercice 3 a) On se donne une courbe birégulière dont le rapport τ/κ est constant. Montrer que la tangente fait un angle constant avec une certaine droite fixe. [Indication : on pourra montrer que, sous les hypothèses, le vecteur $A(s) = \frac{\tau}{\kappa}T + B$ est constant, où s est le paramètre longueur.]

b) On considère la courbe paramétrée donnée par

$$M(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t).$$

Vérifier que la courbe est birégulière puis calculer sa courbure et sa torsion. Montrer que la courbe fait un angle constant avec une direction que l'on déterminera.

Exercice 4 On étudie quelques propriétés de la surface S appelée *hyperboloïde à une nappe* dont l'équation dans l'espace de coordonnées x, y, z est

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

1. Montrer que S peut être paramétrée par

$$M(u, v) = (\,\mathrm{ch}\,(u) \cos v,\ \mathrm{ch}\,(u) \sin v,\ \mathrm{sh}\,u)$$

   et calculer la normale $N = N_S$ et les deux formes fondamentales associées.
2. Calculer la courbure de Gauss et vérifier qu'elle est négative ; calculer la courbure moyenne et vérifier qu'elle est de signe constant et ne s'annule que le long du cercle $z = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

3. Montrer que la surface S est réglée, au sens où elle est couverte par les droites
$$D_\alpha := \{(t\cos\alpha - \sin\alpha, t\sin\alpha + \cos\alpha, t) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$
4. Soit $L : [a,b] \to S \subset \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée tracée sur la surface S. On pose $m(t) = \frac{dt}{ds} = \|L'(t)\|^{-1}$ (Nota Bene : on ne suppose pas que la courbe $L(t)$ est paramétrée par sa longueur). Vérifier que
$$T = m(t)L'(t), \quad \frac{d}{ds}T = m^2(t)L''(t) + mm'(t)L'(t)$$
et en déduire que la courbure géodésique peut s'exprimer par
$$\kappa_g = \det(N,T,T') = m^3(t)\det(N,L',L'').$$
5. Calculer la courbure géodésique des courbes suivantes : les courbes $u = u_0$, les courbes $v = v_0$ et les courbes D_α. Parmi celles-ci lesquelles sont des géodésiques ?
6. Dessiner les courbes D_0, $D_{\pi/2}$ et les intersections de S avec les plans $z = 0$ et $z = 1$.
7. On considère la courbe $\mathcal{C}$ formée (dans l'ordre) par les quatre morceaux suivants :
   (a) l'arc de cercle $\mathcal{C}_1$ découpé par $z = 0$ (dans $y \geq 0$) allant de $A_1 = (0,1,0)$ au point $A_2 = (-1,0,0)$;
   (b) le segment $\mathcal{C}_2$ de $D_{\pi/2}$ joignant A_2 à $A_3 = (-1,1,1)$;
   (c) l'arc de cercle $\mathcal{C}_3$ découpé par $z = 1$ (dans $y \geq 0$) allant de A_3 au point $A_4 = (1,1,1)$;
   (d) le segment $\mathcal{C}_4$ de D_0 joignant A_4 à A_1.

   Écrire la formule de Gauss-Bonnet pour $\mathcal{C}$.
8. Calculer les angles aux sommets A_i ainsi que l'intégrale de la courbure géodésique sur chaque courbe $\mathcal{C}_i$; en déduire la valeur de l'intégrale de la courbure de Gauss sur la surface délimitée.