Université Paris 7 — Année 2003/2004

DEUG MIAS et MASS — MT231

Examen du 23 janvier 2004

Durée : 3 heures. Barème : 5, 4, 6, 5.
Les questions III,5 et IV,6 sont hors barème.

I

Soit a un paramètre réel. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique (e_1, e_2, e_3), est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1- Montrer que le rang de f est au plus égal à 2. En déduire que 0 est une valeur propre de f.

2- Trouver les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f est diagonalisable.

3- On suppose désormais que $a = 1$. Soit $v_2 = f(e_3)$.
a) Montrer que $v_2 \in \ker f$.
b) Montrer que $\ker f$ contient un vecteur v_1 non proportionnel à v_2.
c) Montrer que (v_1, v_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
d) Écrire la matrice de f dans la base (v_1, v_2, e_3).

II

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 2z \\ y' = -2x - y - 4z \\ z' = x + y + 3z \end{cases}.$$

III

On considère la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par la récurrence :

$$a_1 = a_0 = 1 \quad , \quad (\mathcal{S}) \quad (n+1)a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad , \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

1- Montrer que $|a_n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *Indication : on établira par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante, pour tout $n \geq 1$:*

$$(\mathcal{P}_n) \quad |a_n| \leq 1 \quad \text{et} \quad |a_{n-1}| \leq 1 .$$

2- Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1.

3- Soit $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. En utilisant la relation $(\mathcal{S})$, montrer que f est une solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(x) - (x+1)y(x) = 0\,.$$

4- Calculer toutes les solutions de (E). En déduire que f est, sur l'intervalle $]-R, R[$, l'unique solution de (E) telle que $f(0) = 1$. Exprimer f comme une fonction usuelle.

5- Déterminer la valeur exacte de R et démontrer que

$$a_n = \sum_{k \geq 0, l \geq 0, k+2l=n} \frac{1}{k!\, 2^l\, l!} \quad , \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

6- Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) - (x+1)y(x) = e^{x^2/2}\,.$$

IV

Notation : si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{R} \setminus A = \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}$.

On considère les suites de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ et $(g_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{(x-n)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*\,,$$

$$g_n(x) = \frac{1}{(x+n)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-\,,$$

et les séries de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$.
On notera $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ les sommes de ces séries, pour les valeurs de x pour lesquelles elles convergent.

1- Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$ et que la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$.

2- Exprimer, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x+1)$ en fonction de $g(x)$.

3- On considère la fonction $p : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $p(x) = f(x) + g(x)$. Que peut-on dire de $p(x+1) - p(x)$?

4- Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement sur $]-\infty, 1-\varepsilon]$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge normalement sur $[\varepsilon, \infty[$.

5- Démontrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$ et que g est continue sur $]0, \infty[$.

6- Montrer que p est continue sur $]0, 1[$. En déduire que p est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.