Université Paris 7 — Année 2004/2005

DEUG MIAS et MASS — MT231

Examen du 21 janvier 2005

Durée : 3 heures. Barème : 3, 3, 5, 5, 4.

La question III 4 est hors barème.

L'utilisation de calculatrices, téléphones portables et documents est interdite.

I

Déterminer la nature des séries numériques suivantes.

1- $$\sum_{n\geq 1} \cos\frac{1}{n}$$

2- $$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\log(2+n)}$$

3- $$\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

II

Soit a un paramètre réel. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = (2x+ay, x+2y) \quad , \quad \text{pour tout } (x,y)\in\mathbb{R}^2 .$$

1- Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2- Dans le cas où f est diagonalisable, déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de f.

III

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

1- Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2- Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = T$, avec

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Indication : si (v_1, v_2, v_3) sont les vecteurs colonnes qui forment P, on pourra d'abord établir une relation entre v_2, v_3 et Av_3, puis chercher v_3 de la forme $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$.

3- Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = & -x & +y & -z \\ y' = & -3x & & +2z \\ z' = & -3x & +y & +z \end{cases} .$$

4- Calculer T^2, T^3 et plus généralement T^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$. *Indication : on écrira $T = D + N$, où D est diagonale, $N^2 = 0$ et $DN = ND$.*
En déduire A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

IV

On considère l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0 \quad . \tag{1}$$

1- On recherche les solutions de cette équation qui sont développables en série entière sur un voisinage de 0. On pose $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients c_n pour que y soit une solution de (**??**).
2- Démontrer qu'il existe une unique solution f développable en série entière sur un voisinage de 0 telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série.
3- Démontrer qu'il existe une unique solution g développable en série entière sur un voisinage de 0 telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. Déterminer le rayon de convergence de la série.
4- Pouvez-vous reconnaître à partir des séries donnant f et g respectivement des expressions plus simples ?

V

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} e^{-nx^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

1- Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On posera

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad , \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,.$$

2- Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

3- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la fonction f_n', de façon à calculer $a_n = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n'(x)|$.

4- Montrer que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.