Université Paris 7 | MI3
L2 MIAS | 2006-2007

Examen du 12 janvier 2007

Durée : 3 heures

Barème indicatif : I = 2 ; II = 2 ; III = 2 ; IV = 6 ; V = 7 ; VI = 3

L'utilisation de calculatrices, téléphones portables et documents est interdite.

I

Question de cours. Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels. Soit S l'ensemble des fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ qui sont solutions de l'équation différentielle $X' = AX$.
1) Montrer que S est un espace vectoriel.
2) Quelle est la dimension de S ? (on ne demande pas de justifier la réponse).

II

Soit $\alpha \in [0, \pi]$. Déterminer selon α la nature de la série suivante :

$$\sum_{n \geq 1} \sin\left(\alpha + \frac{1}{n^2}\right).$$

III

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des décimales du nombre *irrationnel* π (i.e. $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, etc.). On considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
1) Démontrer que le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à 1.
2) Démontrer que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} |\ a_n \neq 0\}$ est infini.
3) Démontrer que le rayon de convergence de la série est égal à 1.

IV

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{e^{-(n+1)x}}{n(n+1)}.$$

1) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $[0, +\infty[$.
On posera $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$, pour tout $x \in [0, +\infty[$.
2) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
3) La série dérivée $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est-elle absolument convergente sur $[0, +\infty[$? Justifier votre réponse. Démontrer que, pour tout $b > 0$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est normalement convergente sur $[b, +\infty[$.
4) Démontrer que f dérivable sur $]0, +\infty[$ et est décroissante sur $[0, +\infty[$.
5) Démontrer l'inégalité

$$\forall x > 0 \qquad f(x) \leq \frac{e^{-x}}{2(1 - e^{-x})}.$$

En déduire que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
6) Calculer $f(0)$.

V

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme φ_a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est :

$$M_a = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ -3 & a-2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de φ_a. En déduire ses valeurs propres. Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels φ_a est diagonalisable.

2) Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels φ_a est trigonalisable.

3 On suppose dorénavant que $a = 0$. Trouver une matrice inversible P et une matrice T de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

telles que $P^{-1}M_0P = T$.

4) Écrire T sous la forme $T = D + N$, où D est une matrice diagonale et N une matrice telle que $N^2 = 0$ et $DN = ND$. En déduire T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Expliquer comment vous feriez pour calculer $(M_0)^k$.

VI

1) On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de φ. En déduire ses valeurs propres.

2) Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) &= & & y(t) \\ y'(t) &= & -\,9x(t) & +\,6y(t) \end{cases},$$

où les inconnues x et y sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3) En déduire les solutions de l'équation du second ordre $f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = 0$.