Université Paris 7 — Année 2003/2004
DEUG — MT231

Corrigé de l'examen du 23 janvier 2004

I

1- On voit que les deux dernières colonnes de M sont proportionnelles. Ceci implique que f est *au plus* de rang 2 et que le noyau de f est *au moins* de dimension 1. Il existe donc un vecteur non nul v tel que $f(v) = 0 = 0.v$.

2- Le déterminant de $M-\lambda I$ peut se calculer en remplaçant C_3 par C_3+2C_2, puis en développant suivant la dernière colonne. On obtient

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & -3-\lambda & -2\lambda \\ a & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & -3-\lambda & -2 \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - 2(a-1)\right) .$$

Pour $a < 1$, le trinôme $\lambda^2 - 2(a-1)$ n'a pas de racine réelle. Le polynôme caractéristique de f n'est donc pas scindé et f n'est pas diagonalisable (ni même trigonalisable).

Pour $a > 1$, le polynôme caractéristique de f a trois racines réelles : 0, $\pm\sqrt{2(a-1)}$. L'endomorphisme f est donc diagonalisable.

Pour $a = 1$, f admet 0 comme valeur propre triple. Si l'endomorphisme f était diagonalisable, il serait représenté par la matrice nulle dans une certaine base de $\mathbb{R}^3$. On aurait donc $f = 0$, ce qui est évidemment faux.

3- Cette question peut se traiter de deux façons.

Méthode n°1 (indépendante des valeurs numériques). On observe d'une part que f est de rang 1, donc que $\ker f$ est de dimension 2, d'autre part que $M^2 = 0$, autrement dit $f \circ f = 0$. Soit v_3 un vecteur quelconque tel que $f(v_3) \neq 0$ ($v_3 = e_3$ est un choix possible). Si $v_2 = f(e_3)$, on a $v_2 \neq 0$ et $f(v_2) = (f \circ f)(v_3) = 0$, donc $v_2 \in \ker f$. Compte tenu de la dimension de $\ker f$, il existe dans $\ker f$ un vecteur v_1 non proportionnel à v_2.
Montrons que (v_1, v_2, v_3) est un système libre. Soient donc des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Par linéarité, on a encore

$$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3) = 0\,,$$

autrement dit $\lambda_3 v_2 = 0$ et donc $\lambda_3 = 0$. Il vient alors $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$. Puisque (v_1, v_2) est un système libre on conclut que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Par construction de la base (v_1, v_2, v_3), on a

$$f(v_1) = f(v_2) = 0 \quad \text{et} \quad f(v_3) = v_2\,,$$

la matrice de f dans cette base est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Méthode n°2 (par le calcul). On voit que $v_2 = f(e_3) = (2, 6, 2)$, que

$$M \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

et donc que $f(v_2) = 0$. Le noyau de f est le plan d'équation $x - y + 2z = 0$. On voit par là que le vecteur $v_1 = (1, 1, 0)$ appartient à $\ker f$; il est par ailleurs non proportionnel à v_2. Dans la base canonique, le système (v_1, v_2, e_3) est représenté par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det P = 4 \neq 0$, le système (v_1, v_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Le calcul de la matrice de f se fait comme dans la première méthode.

II

1- Le déterminant de $A - \lambda I$ peut se calculer en remplaçant L_1 par $L_1 - L_3$, puis en développant suivant la première ligne. On obtient

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1-\lambda \\ -2 & -1-\lambda & -4 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & -4 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-1)^2\,.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1 est le plan d'équation $x + y + 2z = 0$; il admet comme base (v_1, v_2), où

$$v_1 = (1, -1, 0) \quad , \quad v_2 = (1, 1, -1)\,.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre simple 2 est la droite d'équations $y + 2z = x - z = 0$; cette droite est engendrée par le vecteur

$$v_3 = (1, -2, 1)\,.$$

2- Puisque (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A, un théorème du cours nous dit que la solution générale du système $X' = AX$ s'écrit

$$X(t) = ae^t v_1 + be^t v_2 + ce^{2t} v_3\,,$$

où a, b, c sont des réels quelconques. En coordonnées, cela s'écrit

$$\begin{cases} x(t) = & (a+b)e^t + ce^{2t} \\ y(t) = & (-a+b)e^t - 2ce^{2t} \\ z(t) = & -be^t + ce^{2t} \end{cases}.$$

III

1- La propriété $(\mathcal{P}_1)$ est vraie puisque $a_1 = a_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que si $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, il en est de même pour $(\mathcal{P}_{n+1})$. La propriété $(\mathcal{P}_n)$ et la relation $(\mathcal{S})$ nous donnent

$$|a_{n+1}| = \frac{|a_n + a_{n-1}|}{n+1} \leq \frac{|a_n| + |a_{n-1}|}{n+1} \leq \frac{2}{n+1}\,.$$

Or pour $n \geq 1$, on a $2 \leq n+1$. On obtient ainsi $|a_{n+1}| \leq 1$.

2- D'après la question 1, on a $|a_n x^n| \leq |x|^n$. D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, on voit ainsi que la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente pour $|x| < 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc au moins égal à 1.

3- D'après le théorème de dérivation des séries entières, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$ et l'on a, sur cet intervalle,

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\,.$$

En utilisant la relation $(\mathcal{S})$, on obtient

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} =$$

$$= 1 + (f(x) - 1) + xf(x) = (x+1)f(x)\,.$$

4- L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène, dont la solution générale est donnée par $y(x) = ce^{A(x)}$, où A est une primitive de $x \mapsto x+1$, et c un réel arbitraire. Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = ce^{x+(x^2/2)} \quad (c \in \mathbb{R})\,.$$

L'unique solution de (E) telle que $y(0) = 1$ est la fonction $x \mapsto e^{x+(x^2/2)}$. D'après la question 2), on a donc

$$f(x) = e^x\, e^{x^2/2} \quad \forall x \in]-R, R[\,.$$

5- D'après le cours, les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{x^2/2}$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \quad , \quad e^{x^2/2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\frac{x^{2l}}{2^l}\,,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après le théorème sur le produit de séries entières, la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ — ce qui montre que $R = +\infty$ — et on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k+2l=n} \frac{1}{k!l!2^l}\right)x^n\,.$$

D'où la formule souhaitée pour a_n.

6- Pour résoudre l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad y'(x) - (x+1)y(x) = e^{x^2/2}\,,$$

on utilise la méthode de la variation de la constante. On recherche la solution de (E_1) sous la forme

$$y(x) = u(x)e^{x+(x^2/2)}\,,$$

où u est une fonction inconnue. En reportant cette expression dans (E_1) et en simplifiant, il vient $u'(x) = e^{-x}$, d'où $u(x) = -e^{-x} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. La solution générale de (E_1) est donc

$$y(x) = ce^{x+(x^2/2)} - e^{x^2/2} \quad (c \in \mathbb{R})\,.$$

IV

1- Si x est un réel fixé, n'appartenant pas $\mathbb{N}^*$, on voit que $f_n(x)$ est défini pour tout $n > 0$, que $f_n(x) > 0$ et que $f_n(x) \sim n^{-2}$ quand $n \to +\infty$. Puisque la série de Riemann $\sum n^{-2}$ est convergente, on en déduit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ l'est aussi. Le même raisonnement montre que la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$.

2- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors $x+1$ n'est pas un entier, de sorte que $f(x+1)$ et $f(x)$ sont définis. On a

$$f(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-(n-1))^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = \frac{1}{x^2} + f(x)\,.$$

Le même type de calcul montre que

$$g(x+1) = -\frac{1}{x^2} + g(x)\,.$$

3- D'après la question 2- on a $p(x+1) - p(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4- On voit facilement que la fonction f_n est décroissante sur $]-\infty, 1-\varepsilon]$. On a donc

$$\sup_{x \in]-\infty, 1-\varepsilon]} |f_n(x)| = f_n(1-\varepsilon)\,.$$

D'après la question 1-, la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(1-\varepsilon)$ est converge. On peut donc conclure que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement sur $]-\infty, 1-\varepsilon]$. Le même type de raisonnement montre que la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge normalement sur $[\varepsilon, \infty[$.

5- D'après la question 4-, d'après un théorème du cours et en raison de la continuité de toutes les fonctions f_n sur $]-\infty, 1[$, on peut conclure que f est une fonction continue sur $]-\infty, 1-\varepsilon]$, quel que soit $\varepsilon > 0$. Grâce au caractère local de la continuité, on peut en déduire que f est continue sur l'intervalle $]-\infty, 1[$. Le même type de raisonnement montre que g est continue sur $]0, \infty[$.

6- D'après la question 5-, p est, sur l'intervalle $]0, 1[$, la somme de deux fonction continues. C'est donc une fonction continue sur cet intervalle. Soit $m \in \mathbb{Z}$. D'après la question 3-, on a $p(x) = p(x-m)$ pour tout $x \in]m, m+1[$, ce qui implique la continuité de p sur l'intervalle $]m, m+1[$. Finalement p est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.