Université Paris 7 Année 2004/2005
DEUG MIAS et MASS MT231

Corrigé de l'examen du 21 janvier 2005

I

1- La série est *grossièrement* **divergente** puisque $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = 1$.
2- La suite $u_n = \frac{1}{\log(2+n)}$ est *positive*, *décroissante* et *tend vers 0 lorsque* $n \to \infty$, donc la série de terme général $(-1)^n u_n$ est une série *alternée* **convergente**.
3- Le terme général u_n de la série est positif : on peut donc essayer d'appliquer le critère de d'Alembert. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et on sait que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

On en déduit que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, donc la série est **convergente**.

II

1- Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, l'endomorphisme f est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

dont le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = (2-\lambda)^2 - a$.
Discussion :
- Pour $a < 0$, P n'a pas de racine réelle, f n'est donc pas diagonalisable.
- Pour $a = 0$, f admet 2 comme valeur propre double. Puisque la matrice

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est évidemment de rang 1, le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est de dimension 1. On en déduit que f n'est pas diagonalisable.
- Pour $a > 0$, f admet deux valeurs propres (simples !) $2 \pm \sqrt{a}$, f est donc diagonalisable.

2- En supposant $a > 0$, on voit que les vecteurs

$$v_\pm = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{a} \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $2 \pm \sqrt{a}$.

III

1- Le polynôme caractéristique de A est $-(\lambda+1)^2(\lambda-2)$. Puisque la matrice

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est évidemment de rang 2, le sous-espace propre associé à la valeur propre double -1 est de dimension 1. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

2- Les noyaux de $A-2I$ et $A+I$ sont les droites engendrées respectivement par les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice T souhaitée, il suffit de trouver un vecteur v_3 tel que $(A+I)v_3 = v_2$. Une solution possible est

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On voit facilement que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. En résumé, si on pose

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient $P^{-1}AP = T$.

3- La solution générale du système triangulaire $U'(t) = TU(t)$ est donnée par

$$U(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ (ct+b)e^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix},$$

où a, b et c sont des constantes arbitraires. La solution générale du système $X' = AX(t)$, est donnée par

$$X(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} (ct+b)e^{-t} \\ ae^{2t} + (ct+b+c)e^{-t} \\ ae^{2t} + (ct+b)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

4- Si on pose

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on vérifie facilement que $N^2 = 0$ et $DN = -N = ND$. Puisque les matrices D et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme pour calculer $(D+N)^k$, ce qui nous donne

$$T^k = D^k + kD^{k-1}N = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^{k-1} \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$A^k = PT^kP^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^k & k(-1)^{k-1} & k(-1)^k \\ (-1)^k - 2^k & (k-1)(-1)^{k-1} & 2^k + (k-1)(-1)^k \\ (-1)^k - 2^k & k(-1)^{k-1} & 2^k + k(-1)^k \end{pmatrix}.$$

IV

1- On commence par supposer qu'il existe une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, avec un rayon de convergence $R > 0$, qui est une solution de (1). Alors, grâce aux théorèmes du cours, on sait que cette série est deux fois continuement dérivable sur $]-R, R[$ et que $\forall x \in]-R, R[$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$. En substituant ces expressions dans (1), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(n(n-1)c_n + 4nc_n + 2c_n\right)x^n = 0,$$

ce qui donne, après simplification, la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+2} = c_n.$$

Cette condition nécessaire est, de façon immédiate, équivalente à $y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$. Nous voyons que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$ ont un rayon de convergence égal à 1, donc a posteriori le calcul précédent est valable sur $]-1, 1[$ et la condition obtenue est donc aussi suffisante.

2- et 3- Nous avons $y'(x) = c_0 \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$, donc $y(0) = c_0$ et $y'(0) = c_1$. Donc $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$.

4- On reconnaît une série géométrique dans f :

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2},$$

et

$$g(x) = xf(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

V

1- Soit $x \in \mathbb{R}$. Sachant que $e^t \leq 1$ pour $t \leq 0$, on voit que

$$|f_n(x)| \leq 1/n^2\,. \tag{1}$$

Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, le critère de comparaison implique la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum f_n(x)$.

2- L'inégalité (1) implique la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$. Comme chacune des fonctions f_n est évidemment continue, un théorème du cours permet de conclure que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

3- La fonction f_n' étant impaire, l'étude se fait sur $[0, +\infty[$. On a

$$f_n''(x) = -\frac{2}{n}e^{-nx^2}(1 - 2nx^2)\,,$$

qui s'annule pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. Par ailleurs on observe que $f_n' \leq 0$ sur $[0, +\infty[$, que f_n' est décroissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2n}}[$ et que f_n' est croissante sur $]\frac{1}{\sqrt{2n}}, +\infty[$. On en déduit que

$$a_n = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n'(x)| = -f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}\,\frac{1}{n^{3/2}}\,.$$

4- La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann d'exposant > 1). On voit ainsi que la série de fonctions $\sum f_n'$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation des séries de fonctions permet de conclure que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.