Université Paris 7 MI3
L2 MIAS 2006-2007

Corrigé de l'examen du 12 janvier 2007

Barème indicatif : I = 2 ; II = 2 ; III = 2 ; IV = 6 ; V = 7 ; VI = 3

I) Question de cours. *Soient A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels et S l'ensemble des fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ qui sont solutions de l'équation différentielle $X' = AX$.*

1) *Montrons que S est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

En effet, soient $(t, X_1, X_2) \in \mathbb{R} \times S^2$. La fonction $Z = tX_1 + X_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $Z' = tX_1' + X_2' = tAX_1 + AX_2 = A(tX_1 + X_2) = AZ$ de sorte que $Z \in S$. S est donc un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2) *Quelle est la dimension de S ? (on ne demande pas de justifier la réponse).*

S est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. En effet, un théorème du cours affirme que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique fonction X_{x_0} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ qui soit solution de $X' = AX$ et vérifie $X(0) = x_0$. On peut ainsi définir une application bijective f de $\mathbb{R}^n$ dans S telle que $f(x_0) = X_{x_0}$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On vérifie aisément que f est linéaire, de sorte que f est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans S et S est de dimenson n.

II) *Soit $\alpha \in [0, \pi]$. Déterminons selon α la nature de la série suivante :* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\alpha + \frac{1}{n^2}\right)$.

Notons $u_n(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{1}{n^2}\right)$ le terme général de la série à étudier et remarquons que la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $\sin\alpha$. Si $\alpha \in]0, \pi[$, $\sin\alpha \neq 0$ et la série est grossièrement divergente.

Si $\alpha = 0$, $u_n(\alpha)$ est strictement positif et l'on a l'équivalent $u_n(\alpha) = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, on en déduit, par le critère de comparaison entre deux séries de terme général positif, que la série est convergente.

Si $\alpha = \pi$, $u_n(\alpha) = \sin\left(\pi + \frac{1}{n^2}\right) = -\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est strictement négatif et, d'après ce qui précède, la série de terme général $-u_n(\alpha)$ converge. On en conclut de même que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(\alpha)$ est convergente.

III) *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des décimales du nombre* irrationnel π *($a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, etc.). On considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

1) *Montrons que le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à 1.*

Notons R le rayon de convergence de cette série. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq 9$, $|a_n r^r| \leq 9r^n$ pour tout $r \in [0, 1[$. Si $0 \leq r < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} r^n$ est convergente de sorte que, par comparaison, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ est absolument convergente. Il en résulte que $R \geq 1$.

2) *Montrons que l'ensemble $\mathcal{M} = \{n \in \mathbb{N} |\ a_n \neq 0\}$ est infini.*

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{M}$ est un ensemble fini. Alors $\mathcal{M}$ admet un plus grand élément $A = \max\mathcal{M} \in \mathbb{N}$ de sorte que, pour tout $n \geq A + 1$, $a_n = 0$ et l'on obtient l'expression suivante de π :

$$\pi = a_0, a_1 a_2 \cdots a_A = \sum_{j=0}^{A} a_j 10^{-j} = \frac{\sum_{j=0}^{A} a_j 10^{A-j}}{10^A} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est absurde puisque π est irrationnel. On en conclut que l'ensemble $\mathcal{M}$ est infini.

3) *Prouvons enfin que le rayon de convergence de la série est égal à 1.*

Pour tout $n \in \mathcal{M}$, a_n est un entier non nul de sorte que $a_n \geq 1$. Il s'ensuit que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{j=0}^{N} a_n \geq \sum_{n\in\mathcal{M}\cap[1,N]} 1 = \mathrm{Card}(\mathcal{M} \cap [1, N]).$$

Comme $\mathcal{M}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, la suite croissante $(\mathrm{Card}(\mathcal{M} \cap [1, N]))_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$. On en déduit que $\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} a_n 1^n = +\infty$ et que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ n'est pas absolument convergente en $z = 1$. Donc $R \leq 1$ et, finalement, $R = 1$.

IV) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n(n+1)}\mathrm{e}^{-(n+1)x}$.*

1) *Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $[0, +\infty[$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ est convergente de somme 1, la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

2) *Si $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, montrons que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.*

Appliquons un théorème du cours : comme chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$, la fonction-somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3) *Étudions la convergence normale de la série dérivée $\sum_{n\geq 1} f_n'$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa convergence normale sur $[b, +\infty[$ pour tout $b > 0$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $f_n'(x) = -\frac{1}{n}e^{-nx}$. Ainsi $\sup_{x\geq 0} |f_n'(x)| = \frac{1}{n}$. Comme la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$. Fixons $b > 0$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $\sup_{x\geq b} |f_n'(x)| = \frac{1}{n}e^{-nb} \leq e^{-nb}$. Comme la série géométrique $\sum_{n\geq 1} e^{-nb}$ est convergente, la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est normalement convergente sur $[b, +\infty[$.

4) *Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ et est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.*

Fixons $b > 0$ de façon à remplir les conditions d'application d'un théorème du cours : chaque fonction f_n est dérivable sur $[b, +\infty[$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ est convergente sur $[b, +\infty[$ et la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est *normalement* convergente sur $[b, +\infty[$. On en conclut que la série-somme f est dérivable sur $[b, +\infty[$ et que, pour tout $x \in [b, +\infty[$, $f'(x) = \sum_{n\geq 1} f_n'(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

Comme f est dérivable sur $[b, +\infty[$ pour tout $b > 0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+$, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

5) *Prouvons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{2(1-e^{-x})}$ et que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.*

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n(n+1)}\mathrm{e}^{-nx} \leq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-nx}$ si $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-nx} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$. Comme f est positive et $x \mapsto \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ tend vers 0 en $+\infty$, f tend aussi vers 0 en $+\infty$.

6) *Calculons $f(0)$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ est donc une série téléscopique et, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(0) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

tend vers 1 lorsque N tend vers $+\infty$. Il en résulte que $f(0) = 1$.

V) *Soient $a \in \mathbb{R}$ et φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est :*

$$M_a = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ -3 & a-2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) *Déterminons le polynôme caractéristique χ_a de φ_a, ses valeurs propres et l'ensemble des réels a pour lesquels φ_a est diagonalisable.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi_a(x) = \det(M_a - xI_3)$ se calcule par :

$$\begin{aligned}\chi_a(x) &= \begin{vmatrix} -1-x & -1 & 1 \\ -1 & a-x & 1 \\ -3 & a-2 & 3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & -1 & 1 \\ 0 & a-x & 1 \\ -x & a-2 & 3-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a-x & 1 \\ 1 & a-2 & 3-x \end{vmatrix} \\ &= -x\left(x^2 - (2+a)x + (1+a)\right) = -x(x-1)(x-1-a).\end{aligned}$$

Les valeurs propres de φ_a, racines du polynôme caractéristique χ_a, sont donc : 0, 1 et $1+a$.
Si $a \notin \{0, -1\}$, φ_a, admettant trois valeurs propres deux à deux distinctes, est diagonalisable.

Supposons $a \in \{0, -1\}$: $1+a$ est racine double de χ_a alors que $-a$ est racine simple. Alors, φ_a est diagonalisable ssi l'espace propre $E_{1+a}(\varphi_a)$ de φ_a associé à la valeur propre double $1+a$ est de dimension 2, autrement dit ssi le rang de la matrice $M_a - (1+a)I_3$ est égal à 1.
Or le rang de la matrice $M_a - (1+a)I_3 = \begin{pmatrix} -2-a & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & a-2 & 2-a \end{pmatrix}$ est 1 si $a = -1$, 2 si $a = 0$.
On en conclut que l'ensemble des réels a tel que φ_a est diagonalisable est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2) *Déterminons l'ensemble des réels a pour lesquels φ_a est trigonalisable.*
Comme le polynôme caractéristique χ_a de φ_a est scindé dans $\mathbb{R}$, φ_a est trigonalisable pour tout $a \in \mathbb{R}$.
3) *On suppose que $a = 0$. Trouvons une matrice inversible P et une matrice T de la forme :*

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{telles que } P^{-1}M_0P = T.$$

On sait déjà que 0 est valeur propre simple de φ_0 et 1 valeur propre double.
L'espace propre $E_0(\varphi_0)$ de φ_0 associé à la valeur propre 0 est déterminé par le système d'équations linéaires : $M_0X = 0$. Utilisant l'algorithme du pivot de Gauß sur les lignes, on obtient :

$$M_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_1:=-L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2:=L_2+L_1 \\ L_3:=L_3+2L_1-L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci fournit le système d'équations de $E_0(\varphi_0)$: $(x = z, y = 0)$ et $u_0 = e_1 + e_3$ est une base de $E_0(\varphi_0)$.
Recherchons de même une base de l'espace propre $E_1(\varphi_0)$ associé à la valeur propre 1. Pour cela, appliquons l'algorithme du pivot de Gauß sur les lignes de la matrice $M_0 - I_3$:

$$M_0 - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1:=-L_2 \\ L_2:=L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2:=L_2+2L_1 \\ L_3:=L_3+L_1-L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1:=L_1-L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci fournit le système d'équations de $E_1(\varphi_0)$: $(x = 0, y = z)$ et $u_1 = e_2 + e_3$ est une base de $E_1(\varphi_0)$.
Recherchons un vecteur $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $(\varphi_0 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})v_1 = u_1$. Pour cela, on applique le même algorithme que précédemment en ajoutant à la matrice $M_0 - I_3$ une quatrième colonne consituée des coordonnées de u_1, ce qui conduit au système : $(x = 1, y = z - 2)$. On choisit donc $v_1 = e_1 - 2e_2$.
La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ des coordonnées du système de vecteurs (u_0, u_1, v_1) dans la base (e_1, e_2, e_3) est clairement de rang 3 : (u_0, u_1, v_1) est donc une base de $\mathbb{R}^3$ et P est la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) dans la base (u_0, u_1, v_1). Notons T la matrice représentant φ_0 dans la base (u_0, u_1, v_1) de sorte que $P^{-1}M_0P = T$. Il vient que $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4) *Montrons qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice N telles que $N^2 = 0$, $DN = ND$ et $T = D + N$ et calculons T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ pour en déduire une méthode de calcul de M_0^k.*
Posons $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $T = D + N$, $N^2 = 0$ et $DN = ND = N$.
Comme D et N commutent, la formule du binôme de Newton prouve que, si $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$,

$$T^k = (D+N)^k = \sum_{0 \leq j \leq k} \binom{k}{j} N^j D^{k-j} = D^k + kND^{k-1} = D + kND = D + kN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

puisque $N^j = 0$ si $j \geq 2$ et $D^k = D$ pour tout $k \geq 1$. Bien entendu, $T^0 = I_3$ et $T^1 = T$.
Il en résulte que, si $k \in \mathbb{N}^*$, $M_0^k = (PTP^{-1})^k = PT^kP^{-1} = P(T + (k-1)N)P^{-1} = M_0 + (k-1)PNP^{-1}$.

VI) *Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}.$$

1) *Déterminons le polynôme caractéristique χ de φ et ses valeurs propres.*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi(x) = \det(A - xI_2) = -x(6-x) + 9 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. 3 est donc l'unique valeur propre (double) de φ. φ ne peut être diagonalisable car, sinon, il existerait une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = 3I_2$, i.e. $A = 3I_2$, ce qui est absurde.
2) *Résolvons le système différentiel*

$$\left\{ \begin{array}{rcrr} x'(t) & = & & y(t) \\ y'(t) & = & -\ 9x(t) & +\ 6y(t) \end{array} \right. ,$$

où les inconnues x et y sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Notons X la fonction inconnue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
Alors (x, y) est solution du système différentiel ssi $X'(t) = AX$. Pour résoudre cette équation différentielle, il nous faut trigonaliser la matrice A. On trouve aisément $A = PTP^{-1}$ où

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système $X' = AX = PTP^{-1}X$ équivaut donc à $Y' = TY$, où l'on a posé $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.
$Y' = TY$ s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcrrrr} u'(t) & = & 3 & u(t) & + & v(t) \\ v'(t) & = & & & +\ 3 & v(t) \end{array} \right. .$$

La seconde équation a pour solution $v(t) = v(0)e^{3t}$. La première s'écrit alors : $u'(t) = 3u(t) + v(0)e^{3t}$. '
Si $w(t) = e^{-3t}u(t)$, on constate que $w'(t) = e^{-3t}(u'(t) - 3u(t)) = v(0)$ de sorte que $w(t) = w(0) + v(0)t$ et $u(t) = (u(0) + v(0)t)e^{3t}$. On en déduit que

$$Y(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} u(0) + v(0)t \\ v(0) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y(0)$$

$$\text{et} \qquad X(t) = PY(t) = e^{3t} P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}X(0) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1-3t & t \\ -9t & 3t+1 \end{pmatrix} X(0).$$

3) *Déterminons les solutions de l'équation du second ordre $\mathcal{E}$: $f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = 0$.*
Pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, posons $x = f$ et $y = f'$. Alors f est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est solution du système $X' = AX$. En effet,

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' \\ -9f + 6f' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = AX.$$

Il résult alors de la question précédente que les solutions de $\mathcal{E}$ sont : $f(t) = e^{3t}((1-3t)f(0) + tf'(0))$.