Partiel du 23 octobre 2010 ; durée : 3 heures (suites, séries numériques et séries de fonctions)

Exercice 1 (Suites récurrentes) On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en imposant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1. Montrer que pour tout entier n on a $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ (on pourra procéder par récurrence).
2. Montrer que la suite u_n est croissante.
3. Montrer que la suite u_n est convergente.
4. Conclure que $\lim u_n = 3$.

Exercice 2 (Séries numériques) Déterminer lesquelles des séries suivantes sont convergentes, absolument convergentes ou divergentes.

$$\sum_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{2}; \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n\log(n+1)}; \quad \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{n}\right); \quad \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\log n}.$$

Exercice 3 (Comparaison intégrale/série) Soit $a > 0$ on se propose d'étudier les séries

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a}. \tag{1}$$

1. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^a}$ est décroissante sur $[2, +\infty)$.
2. Calculer l'intégrale $I(X) = \int_2^X \frac{dx}{x(\log x)^a}$. Pour quelle valeur de a la limite $\lim_{X\to\infty} I(X)$ existe-t-elle ?
3. En déduire que la série (1) est convergente pour $a > 1$ et divergente pour $a \leqslant 1$.
4. En déduire l'encadrement :

$$\frac{1}{\log 2} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \leqslant \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{2(\log 2)^2}.$$

Exercice 4 (Séries de fonctions : convergence simple) On se propose d'étudier les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la série suivante est convergente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n. \tag{2}$$

1. En utilisant le critère de d'Alembert, montrer que la série est absolument convergente si $|x| < 1/4$ et divergente si $x > 1/4$.
2. Que pouvez-vous conclure si $x < -1/4$?
3. On pose $u_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$. Montrer que la suite u_n est décroissante.
4. En utilisant la formule de Stirling (que l'on ne demande pas de démontrer !) :

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

   montrer que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et en particulier $\lim u_n = 0$.
5. En déduire que la série (2) est convergente pour $x = -1/4$ et divergente pour $x = 1/4$.

Exercice 5 (Séries de fonctions : convergence normale) On définit (pour x réel) les séries de fonctions :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3+n^2} \qquad \text{et} \qquad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+n}.$$

1. Montrer que ces deux séries convergent normalement sur tout $\mathbb{R}$ et définissent des fonctions continues.
2. Calculer $S(0)$ et $T(0)$ (on pourra observer pour la deuxième série que $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).
3. Montrer que $S(x)$ est dérivable et que $S'(x) = T(x)$.
4. Conclure que, au voisinage de 0 on a $S(x) = x + o(x)$.