Un corrigé du partiel du 23 octobre 2010
(suites, séries numériques et séries de fonctions)

Exercice 1 (Suites récurrentes) *On définit une suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *en imposant* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1. *Montrer que pour tout entier* n *on a* $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ *(on pourra procéder par récurrence).*
2. *Montrer que la suite* u_n *est croissante.*
3. *Montrer que la suite* u_n *est convergente.*
4. *Conclure que* $\lim u_n = 3$.

Réponses.

1. On a par hypothèse $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$; supposons ("hypothèse de récurrence") que $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ alors $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \leqslant \sqrt{2.3 + 3} = 3$ est également positif d'où l'inégalité cherchée.
2. De même on a $u_1 = \sqrt{3} \geqslant 0 = u_0$; plus généralement
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} = \frac{(3 - u_n)(u_n + 1)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \geqslant 0$$
3. La suite u_n est croissante et majorée (par 3) donc convergente.
4. Soit $\ell = \lim_n u_n$, comme la fonction $\sqrt{2x + 3}$ est continue, on a nécessairement $0 \leqslant \ell = \sqrt{2\ell + 3}$ et donc $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$ i.e. $\ell = 3$ ou -1 donc on peut conclure que $\ell = \lim u_n = 3$.

Exercice 2 (Séries numériques) *Déterminer lesquelles des séries suivantes sont convergentes, absolument convergentes ou divergentes.*

$$\sum_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{2}; \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n \log(n+1)}; \quad \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n}\right); \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\log n}.$$

Réponses.

Pour la première suite, le terme général vérifie $\lim_n \sqrt[n]{2} = 1$ donc la série corespondante est divergente.

Pour la deuxième série réarrangeons le terme général sous la forme
$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n \log(n+1)} = \frac{1}{n \log(n+1)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \leqslant \frac{1}{n \log(n+1)\sqrt{n+1}}$$
On voit que la série est à termes positifs et est dominée par une série de Riemann de la forme $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ qui est convergente, donc la série initiale est convergente.

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{3^n}$ est une série géométrique convergente cependant la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente donc la série étudiée est divergente.

La suite $\frac{1}{\log n}$ est décroissante (car la fonction logarithme est croissante) et tend vers zéro (car la fonction logarithme tend vers l'infini quand x tend vers l'infini) ; par application directe du théorème sur les séries alternées, la série est convergente.

Exercice 3 (Comparaison intégrale/série) *Soit* $a > 0$ *on se propose d'étudier les séries*
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a}. \tag{1}$$

1. *Montrer que la fonction* $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^a}$ *est décroissante sur* $[2, +\infty)$.
2. *Calculer l'intégrale* $I(X) = \int_2^X \frac{dx}{x(\log x)^a}$. *Pour quelle valeur de* a *la limite* $\lim_{X\to\infty} I(X)$ *existe-t-elle ?*
3. *En déduire que la série (1) est convergente pour* $a > 1$ *et divergente pour* $a \leqslant 1$.
4. *En déduire l'encadrement :*
$$\frac{1}{\log 2} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \leqslant \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{2(\log 2)^2}.$$

Réponses.

1. Calculons la dérivée $f'(x) = \left(\frac{1}{x(\log x)^a}\right)' = -\frac{\log x + a}{x^2(\log x)^{a+1}}$; celle-ci est négative pour $x \geqslant e^{-a}$ donc la fonction $f(x)$ bien est décroissante sur $[2, +\infty)$.
2. Calculons l'intégrale
$$I(X) = \int_2^X \frac{dx}{x(\log x)^a} = \begin{cases} \left[\frac{1}{(1-a)(\log x)^{a-1}}\right]_2^X = \frac{1}{(a-1)(\log 2)^{a-1}} + \frac{1}{(1-a)(\log X)^{a-1}} & \text{si } a \neq 1 \\ [\log \log x]_2^X = \log \log X - \log \log 2 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$
On en tire que la limite $\lim_{X\to\infty} I(X)$ existe si et seulement si $a > 1$; dans ce cas la limite vaut d'ailleurs $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^a} = \frac{1}{(a-1)(\log 2)^{a-1}}$.
3. Par le critère de comparaison série/intégrale (applicable ici puisque $f(x)$ est positive et monotone) la série (1) est convergente pour $a > 1$ et divergente pour $a \leqslant 1$.
4. Puisque la fonction $f(x)$ est décroissante, on a l'inégalité $f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n)$; en sommant sur n on peut en déduire l'encadrement :
$$\sum_{n=2}^{N+1} f(n) = \sum_{n=1}^{N} f(n+1) \leqslant \int_1^{N+1} f(t)dt \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(n)$$
En faisant tendre N vers l'infini on obtient $\sum_{n=2}^\infty f(n) \leqslant \int_1^\infty f(t)dt \leqslant \sum_{n=1}^\infty f(n)$ ou encore
$$\int_1^\infty f(t)dt \leqslant \sum_{n=1}^\infty f(n) \leqslant f(1) + \int_1^\infty f(t)dt.$$
En utilisant la question 2 pour $a = 2$ on en tire bien :
$$\frac{1}{\log 2} \leqslant \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^2} \leqslant \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{2(\log 2)^2}.$$

Exercice 4 (Séries de fonctions : convergence simple) *On se propose d'étudier les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la série suivante est convergente :*
$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n. \tag{2}$$

1. *En utilisant le critère de d'Alembert, montrer que la série est absolument convergente si $|x| < 1/4$ et divergente si $x > 1/4$.*
2. *Que pouvez-vous conclure si $x < -1/4$?*
3. *On pose $u_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$. Montrer que la suite u_n est décroissante.*
4. *En utilisant la formule de Stirling (que l'on ne demande pas de démontrer !) :*
$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$
montrer que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et en particulier $\lim u_n = 0$.
5. *En déduire que la série (2) est convergente pour $x = -1/4$ et divergente pour $x = 1/4$.*

Réponses.

1. La série est trivialement convergente pour $x = 0$, on peut donc supposer $x \neq 0$. Posons $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}|x|^n$ alors
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!(n+1)!^2}|x| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x| = 4|x|\frac{n+1/2}{n+1}$$
D'après le critère de d'Alembert, si $4|x| < 1$ la série des a_n est convergente et la série étudiée est absolument convergente ; si $4|x| > 1$ la série des a_n est divergente et donc si $x > 1/4$ la série étudiée est divergente.

2. Si l'on utilise la notion de rayon de convergence d'une série entière, on peut conclure de la question précédente que le rayon de convergence de la série étudiée est égal à $1/4$ et donc que la série diverge pour $x < -1/4$. Sans utiliser la notion de rayon de convergence et ses propriétés on pouvait conclure ainsi : comme $\lim_n (n+1/2)/(n+1) = 1$ et $4|x| > 1$ on voit que pour n asssez grand (disons pour $n \geqslant n_0$) on aura $a_{n+1} \geqslant a_n$ ce qui implique que a_n ne tend pas vers zéro et que la série étudiée est divergente.
3. On calcule
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!4^n n!^2}{4^{n+1}(n+1)!^2(2n)!} = \frac{n+1/2}{n+1} < 1,$$
donc la suite u_n est bien décroissante.
4. En utilisant la formule de Stirling donnée dans l'énoncé, on obtient
$$u_n \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{4^n(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$
et on vérifie que $\lim u_n = 0$.
5. Lorsque $x = 1/4$, la série (2) est une série à terme positif et son terme générale est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ qui est le terme d'une série de Riemann divergente ; d'après le critère d'équivalence, la série (2) est donc divergente pour $x = 1/4$.
Lorsque $x = -1/4$ la série (2) s'écrit $\sum_n (-1)^n u_n$ et on a montré que u_n était décroissante et tendait vers zéro ; d'après le théorème des séries alternées, la série (2) est donc convergente (mais non absolument convergente) en $x = -1/4$.

Exercice 5 (Séries de fonctions : convergence normale) *On définit (pour x réel) les séries de fonctions :*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3+n^2} \qquad \text{et} \qquad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+n}.$$

1. *Montrer que ces deux séries convergent normalement sur tout $\mathbb{R}$ et définissent des fonctions continues.*
2. *Calculer $S(0)$ et $T(0)$ (on pourra observer pour la deuxième série que $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).*
3. *Montrer que $S(x)$ est dérivable et que $S'(x) = T(x)$.*
4. *Conclure que, au voisinage de 0 on a $S(x) = x + o(x)$.*

Réponses.

1. On majore
$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^3+n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^3+n^2} \leqslant \frac{1}{n^3} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\cos(nx)}{n^2+n}\right| \leqslant \frac{1}{n^2+n} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
Comme la série des $1/n^3$ (resp. des $1/n^2$) est convergente, on en déduit bien la convergence normale pour les deux séries. Comme les fonctions $\frac{\sin(nx)}{n^3+n^2}$ et $\frac{\cos(nx)}{n^2+n}$ sont clairement continues, la convergence normale garantit que la fonction définie par la série est continue.
2. On a bien sûr $S(0) = 0$ puisque $\sin(0) = 0$. Observons comme le suggère l'énoncé que $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. On a donc
$$T(0) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(0)}{n^2+n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$
3. Le terme général de la série $T(x)$ est la dérivée du terme général de la série $S(x)$. On a vu que la série $T(x)$ était normalement convergente, de plus la série $S(x)$ est convergente en un point (en fait en tout point) ; d'après le théorème de dérivation des séries, la fonction définie par la série $S(x)$ est dérivable et $S'(x) = T(x)$.
4. La fonction $S(x)$ est donc continûment dérivable (sa dérivée $T(x)$ est continue d'après la première question) et vérifie $S(0) = 0$ et $S'(0) = T(0) = 1$ donc , au voisinage de 0 on a $S(x) = x + o(x)$, d'après la formule de Taylor.