Université Paris Diderot Paris 7
Département de Sciences Exactes
L2 MASS
MA3 – Année 2011/12

Partiel du 29 octobre 2011 ; durée : 3 heures

(suites, séries numériques et séries de fonctions)

Les exercices sont indépendants. Les documents autorisés sont vos notes de cours et TD ainsi que le polycopié du cours. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 (Suites récurrentes) On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par sa valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et en imposant la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$.

1. Étudier la fonction $f(x) = \frac{1}{3}(4 - x^2)$; en particulier déterminer quand $x > f(x)$, respectivement $x < f(x)$ ou $x = f(x)$.
2. Montrer que si u_n est convergente, alors sa limite vaut $\ell = +1$ ou $\ell = -4$.
3. Montrer que si $|u_0| > 4$ alors la suite tend vers moins l'infini.
4. Montrer si $u_0 = +1$ ou $u_0 = -4$ alors la suite est constante, et vérifier que si $u_0 = 4$ alors $u_1 = -4$.
5. Montrer que si $|u_0| < 4$ alors la suite u_n est convergente de limite $+1$.

Exercice 2 (Séries numériques) Déterminer lesquelles des séries suivantes sont convergentes, absolument convergentes ou divergentes.

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right); \quad \sum_{n\geqslant 1}\sqrt{\log(n+1)} - \sqrt{\log n}; \quad \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n}{4^n}+\frac{1}{n}\right); \quad \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n(\log n)^2}{n}.$$

Exercice 3 (Comparaison intégrale/série) Soit $a \in \mathbb{R}$ on se propose d'étudier les séries et intégrales

$$S(a) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a}{1+n^2} \qquad \text{et} \qquad I(a) := \int_1^{\infty}\frac{x^a}{1+x^2}dx := \lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{x^a}{1+x^2}dx. \tag{1}$$

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la série $S(a)$ est-elle convergente ?
2. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{x^a}{1+x^2}$ est décroissante sur $[1, +\infty)$ si $a < 2$.
3. Démontrer les inégalités $I(a) \leqslant S(a) \leqslant I(a) + \frac{1}{2}$.
4. En déduire que l'intégrale (1) est convergente pour $a < 1$ et divergente pour $a \geqslant 1$.

Exercice 4 (Convergence simple, équivalents) Soit $a > 0$, on étudie la série

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$$

1. Pour quelles valeurs de a la série est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que

$$\frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a}} + O\left(\frac{1}{n^{3a}}\right) \tag{2}$$

   En déduire que la série converge pour $a > 1/2$ et diverge pour $a \leqslant 1/2$.

Exercice 5 (Séries de fonctions : convergence normale) On définit (pour x réel) les séries de fonctions :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^3 + n^2} \qquad \text{et} \qquad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + n}.$$

1. Montrer que ces deux séries convergent normalement sur tout l'intervalle $[0, +\infty)$ et y définissent des fonctions continues. Les séries convergent-elles pour $x < 0$?
2. Calculer $T(0)$ (on pourra observer que $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).
3. Montrer que $S(x)$ est dérivable et que $S'(x) = -T(x)$.
4. Conclure que, au voisinage de 0 on a $S(x) = S(0) - x + o(x)$.

Exercice 6 (Séries entières) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + 2 + \cdots + n}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!(n+1)!} x^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \pi^n \right) x^n$$