Université Denis Diderot (Paris VII) **2004/05**
MT231

Samedi 20 novembre
Partiel
Durée : 3h - Barème indicatif : 4,5 - 6 - 4 - 5,5.

I

Pour chacune des séries numériques suivantes dire si elle est convergente ou divergente :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n!}} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n} \,.$$

II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \geq 0$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{1+xn^2} \,.$$

1- Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
On posera

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad , \forall x > 0 \,.$$

2- Soit un réel $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.
3- Montrer que f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.
4- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
5- Soit un réel $\alpha \in]1/2, 1[$ et soit $g_n(x) = x^\alpha f_n(x)$. Montrer que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.
6- (Hors barème) En déduire que

$$f(x) = o\left(x^{-\alpha}\right) \quad , \quad \text{quand } x \to 0+ \,.$$

III

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{8^n} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2 8^n} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{8^n} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n^2}}{8^n} \, .$$

IV

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x, on pose

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)} \, .$$

On posera

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \, ,$$

pour tout réel x tel que la série $\sum f_n(x)$ converge

1- Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum f_n$ est égal à 1.

2- Montrer que f est définie et de classe C^2 sur l'intervalle $]-1,1[$. Calculer la dérivée seconde $f''(x)$, pour tout $x \in]-1,1[$.

3- Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

4- Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. *Indication : on rappelle que la fonction* $x \mapsto x\ln x - x$ *est une primitive de la fonction* $x \mapsto \ln x$ *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$.

5- Des questions 3 et 4, déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} \, .$$