Université Paris 7 MI3 et MA3
L2, MIAS et MASS 2006-2007

Partiel du 4 novembre

1) Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n \quad , \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad , \quad \sum_{n\geq 1}\frac{\ln^5 n}{n^{4/3}} \quad , \quad \sum_{n\geq 1}\tan\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad .$$

2) a) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{100} \leq a_n \leq 100\,.$$

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$?

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^{n^3}$. *Indication :* on pourra discuter, suivant le paramètre réel positif r, la valeur de $\lim_{n\to+\infty} r^{n^2}$.

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geq 0 \quad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-e^{-\frac{x}{n}}\right)\,.$$

a) Étudier brièvement la fonction f_n, sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

On posera $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \geq 0$.

c) Soit b un réel positif. Calculer $\sup_{0\leq x\leq b}|f_n(x)|$. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0,b]$.

d) Calculer $\sup_{x\geq 0}|f_n(x)|$. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

e) Montrer que f est une fonction continue sur $[0,+\infty[$.

f) Montrer que f est une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$, et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$.

g) Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$ et tout réel $x \geq m$, on a

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{m} f_n(x) \geq \left(1-\frac{1}{e}\right)\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

h) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(Tourner la page)

Exercice pour les étudiants de MI3 seulement :

4) On considère les fonctions

$$f(x) = \frac{1}{2-x} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{3-x} \quad , \quad h(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}.$$

Le but de cet exercice est de développer en séries entières ces trois fonctions, autrement dit d'écrire chacune de ces fonctions sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour tout x suffisamment proche de 0.

a) Soit a un réel non nul. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{a^n} x^n$.

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^n} x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$.

b) À l'aide de la question précédente, développer en séries entières les fonctions f et g. On précisera les rayons de convergence des séries entières obtenues.

c) Décomposer la fonction rationnelle h en éléments simples. En déduire le développement en série entière de h. Déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice pour les étudiants de MA3 seulement :

4) ...