Partiel du 10 novembre

1) **Question de cours 1.**

a) Énoncer le théorème concernant l'*intégration terme à terme d'une série de fonctions définies sur un intervalle* $[a, b]$.

b) À l'aide de ce théorème, prouver que :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[\quad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2) **Question de cours 2.**

a) Donner l'énoncé du théorème sur les *séries alternées.*

b) On note pour tout entier $n \geq 2$:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

- Peut-on appliquer à la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n a_n$ le théorème sur les séries alternées ?
- Étudier la série

$$\sum_{n\geq 2} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - (-1)^n a_n \right).$$

- En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n a_n$.

3) Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad , \quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)\sqrt{n}} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right).$$

4) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geq 0 \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + n^3 x^2}.$$

a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

On posera $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *pour tout réel* $x \geq 0$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. Quelle conclusion peut-on en tirer concernant la fonction f ?

c) Soit a un réel tel que $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f'_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Quelle conclusion peut-on en tirer concernant la fonction f ?

d) Montrer l'existence pour tout réel $x > 0$ de l'intégrale impropre :

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^3 x^2}.$$

Dès lors on définira la fonction $g : \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ *par*

$$\forall x > 0 \quad g(x) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^3 x^2}.$$

e) À l'aide d'un changement de variable, exprimer simplement $g(x)$ en fonction de x.

f) Montrer que $f(x) \geq x g(x)$, pour tout $x > 0$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?