Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI3/MA3 – Année 2009/10
L2 Info et Mass

Un corrigé du partiel du 30 octobre 2009 : (fonctions, séries numériques et séries de fonctions)

Exercice 1 On rappelle que e désigne la base du logarithme, c'est-à-dire le nombre tel que $\log e = 1$. Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1. *Montrer que* $\lim u_n = e$.
   Observons que $\log u_n = n\log(1+\frac{1}{n}) = n\left(\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right) = 1+O(\frac{1}{n})$ donc $\lim \log u_n = 1$ et, puisque la fonction exponentielle est continue, $\lim u_n = e$.
2. *Montrer que la suite* u_n *est croissante et en déduire la majoration* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. *[Indication : pour montrer* $u_{n+1} \geqslant u_n$ *on pourra commencer par montrer que la fonction* $f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$ *est décroissante pour* $x > 0$*]*
   Introduisons comme le suggère l'énoncé la fonction $f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$; on a $f'(x) = \frac{\frac{x}{x+1}-\log(x+1)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$ avec $h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} < 0$ et $h(0) = 0$ donc $h(x) \leqslant 0$ et $f'(x) \leqslant 0$. On en tire que f est décroissante et en particulier que $f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant f\left(\frac{1}{n+1}\right)$ soit encore

$$\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\log(1+\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad n\log(1+\frac{1}{n}) \leqslant (n+1)\log(1+\frac{1}{n+1}) \quad \Leftrightarrow \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$$

   La suite u_n étant croissante et convergente vers e, on a donc pour tout n l'inégalité $u_n \leqslant e$.

Exercice 2 *Déterminer lesquelles des séries suivantes sont convergentes, absolument convergentes ou divergentes.*

$$\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\frac{1}{n}\right); \quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{\binom{2n}{n}}{3^n}; \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n^3)}{n^2}; \quad \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$$

Pour la première, le terme général $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 1 donc la série est "évidemment" divergente.

Pour la deuxième, notons que le terme général est strictement positif, ce qui permet d'utiliser le critère de d'Alembert :

$$u_{n+1}/u_n = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{3^{n+1}}\Big/\frac{\binom{2n}{n}}{3^n} = \frac{(2n+2)!3^n(n!)^2}{(n+1!)^2 3^{n+1}(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{3(n+1)^2},$$

donc $\lim u_{n+1}/u_n = 4/3 > 1$ et la série est donc divergente.

En notant que $|\cos(n^3)| \leqslant 1$ on voit que le terme général de la troisième série est majoré en valeur absolue par $1/n^2$ dont la série (de Riemann) est convergente ; la série est donc absolument convergente et convergente. Le terme général de la quatrième série est de signe alterné, montrons qu'en valeur absolue il est décroissant, ce qui montrera que la série est convergente. En effet $(n+1-\sqrt{n+1})-(n-\sqrt{n}) = 1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1} = 1-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{1+n}} > 0$. Notons enfin que $|u_n| = \frac{1}{n-\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$ donc la série n'est pas absolument convergente.

Remarque. On pouvait aussi raisonner ainsi pour la dernière série. On a $\frac{1}{n-\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-1/\sqrt{n}} = \frac{1}{n}(1+O(1/\sqrt{n})) = \frac{1}{n}+O(n^{-3/2})$ donc $u_n = \frac{(-1)^n}{n}+O(n^{-3/2})$. Ainsi u_n est somme d'un terme dont la série est convergente (mais non absolument) et d'un terme dont la série (majorée par une série de Riemann) est absolument convergente.

Exercice 3 *On pose dans cet exercice*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad S := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$$

En appliquant une comparaison intégrale/série, montrer que

$$0 < S - S_n \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

La série est une série de Riemann convergente. La fonction $1/t^3$ est *décroissante* et on a donc pour $t \in [k-1,k]$ l'inégalité $1/t^3 \geqslant 1/k^3$ donc $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3} \geqslant 1/k^3$. On peut donc écrire

$$S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3} = \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^3} = \left[\frac{1}{2t^2}\right]_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2}.$$

Exercice 4 *Déterminer le rayon de convergence des séries*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(n+1)!(2n)!} x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

Notons $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la première série, on a alors $a_{n+1}/a_n = \frac{(n+1)!^3 (n+1)!(2n)!}{(n+2)!(2n+2)!(n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(n+2)(2n+2)(2n+1)}$ a pour limite $\frac{1}{4}$; le rayon de convergence de la série est donc $R = 4$.

La seconde série est une série géométrique de raison $x^3/3$, en effet $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{3}\right)^n$; elle est donc convergente si et seulement si $|x^2/3| < 1$ donc si et seulement si $|x| < \sqrt{3}$, on peut conclure que le rayon de convergence de la série est donc $R = \sqrt{3}$.

Exercice 5 *On définit les fonctions de* $[0, +\infty)$ *vers* $\mathbb{R}$ *:*

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \qquad \text{et} \qquad g(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

1. *Montrer que la série* $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x)$ *converge simplement sur* $[0, +\infty)$.
   Les fonctions $f_n(x)$ sont à valeurs positives. Comme $f_n(0) = 0$, la série converge trivialement (et a pour somme $S(0) = 0$). Si $x > 0$, on peut majorer $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant \frac{1}{xn^2}$; la série est donc majorée à une constante près par une série de Riemann convergente et est donc elle-même convergente.
2. *Montrer que la série* $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x)$ *converge normalement sur* $[a, +\infty)$ *(pour tout* $a > 0$*).*
   Lorsque $x \in [a, +\infty)$ on peut écrire $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant \frac{1}{xn^2} \leqslant \frac{1}{an^2}$. Comme la série $\sum \frac{1}{an^2}$ est convergente, on obtient bien la convergence normale sur tout l'intervalle $[a, +\infty)$.
3. *En déduire que la fonction définie par la série* $S(x) := \sum_{n \geqslant 0} f_n(x)$ *est continue sur* $]0, +\infty)$.
   Une application directe du cours montre que la fonction $S(x)$ est continue sur $[a, +\infty)$ pour tout $a > 0$, puisqu'elle y est définie par une série normalement convergente de fonctions continues. La fonction $S(x)$ est donc continue sur $\cup_{a>0} [a, +\infty) =]0, +\infty)$.
4. *Montrer les inégalités*
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$$
   La fonction $\frac{1}{1+x^2t^2}$ est *décroissante* (par rapport à t) donc
   $$\frac{1}{1+(k+1)^2x^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leqslant \frac{1}{1+k^2x^2}.$$
   En sommant ces inégalités de $k = 0$ à l'infini, on obtient les inégalités annoncées :
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+(k+1)^2x^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$$
5. *Montrer que*
   $$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} g(t)dt = \frac{\pi}{2x}.$$
   En déduire que, lorsque x *tend vers zéro, on a*
   $$\lim_{x \to 0} S(x) = \frac{\pi}{2},$$

et en particulier que $S(x)$ n'est pas continue en 0.
La changement de variable $u = tx$ (ici x est fixé et t est la variable) donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{x}\left[\mathrm{Arctg}(u)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}.$$

Les inégalités précédentes, multipliées par $x > 0$ donnent

$$\frac{\pi}{2} \leqslant S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} \leqslant x + \frac{\pi}{2}.$$

On conclut bien que $\lim_{x\to 0} S(x) = \frac{\pi}{2}$, et que, comme $S(0) = 0$, la fonction S n'est pas continue en 0.

Remarque. Un théorème du cours affirme qu'une fonction définie par série normalement convergente de fonctions continues est elle-même continue ; on peut en conclure que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty)$.