Université Denis Diderot (Paris VII) **2004-2005**
MT231

Corrigé du partiel du 20 novembre

I

1- La série étant à termes strictement positifs, on peut lui appliquer le critère de d'Alembert : on voit que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{1}{n+1}}$$
tend vers 0 quand $n \to +\infty$; on en déduit que la série est convergente.

2- On a
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} ;$$
le terme général de la série tend donc vers $1/e$; puisqu'il ne tend pas vers zéro, la série est divergente.

3- La série est de la forme $\sum(-1)^n a_n$. Elle est convergente, car elle vérifie les hypothèses du théorème sur les séries alternées. On a en effet
$$2n + (-1)^n \geq 2n - 1 > 0 \,,$$
d'où $a_n > 0$, pour tout $n \geq 1$, et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$; de plus la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante puisque
$$2(n+1) + (-1)^{n+1} \geq (2n+2) - 1 = 2n + 1 \geq 2n + (-1)^n \,,$$
pour tout $n \geq 1$.

II

1- Pour $x > 0$, on a
$$0 < f_n(x) < \frac{1}{x}\frac{1}{n^2} ;$$
puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, le théorème de comparaison permet de conclure que la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.

2- Soit un réel $a > 0$. Pour $x \in [a, +\infty[$, on a
$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{a}\frac{1}{n^2} \,.$$
Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, on en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

3- Soit $x_0 > 0$. On choisit un nombre a tel que $0 < a < x_0$ (par exemple $a = x_0/2$). Puisque chaque fonction f_n est évidemment continue en x_0 et que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, un théorème du cours permet de conclure que la fonction f est continue en x_0. Ainsi f est-elle continue en tout point de l'intervalle $]0, +\infty[$.

4- D'après les théorèmes usuels, la fonction f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et l'on a

$$f_n'(x) = \frac{-n^2}{(1 + xn^2)^2} \quad \forall x \geq 0\,.$$

Soit un réel $a > 0$. On a

$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{n^2} \quad \forall x \geq a\,;$$

la série $\sum f_n'$ converge donc normalement sur $[a, +\infty[$; un théorème du cours permet de conclure que la fonction f est dérivable sur $[a, +\infty[$. En raisonnant comme dans la question précédente, on conclut que f est dérivable en tout point de l'intervalle $]0, +\infty[$.

5- On commence par une brève étude de la fonction g_n. Cette fonction est positive, continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$. Puisque

$$g_n'(x) = \frac{x^{\alpha - 1}\,(\alpha + (\alpha - 1)n^2 x)}{(1 + xn^2)^2} \quad , \forall x > 0\,,$$

on voit que

$$\sup_{x \geq 0} |g_n(x)| = g_n\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\,\frac{1}{n^2}\right) = \alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1 - \alpha}\frac{1}{n^{2\alpha}}\,.$$

Puisque $2\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ est convergente ; en conséquence la série $\sum g_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

6- Posons $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, pour tout $x \geq 0$. D'après la question 5, la fonction g est continue sur $[0, +\infty[$. Puisque $x^\alpha f(x) = g(x)$, pour tout $x > 0$, on a

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha f(x) = \lim_{x \to 0+} g(x) = g(0) = 0\,,$$

ce qui signifie que

$$f(x) = o\left(x^{-\alpha}\right) \quad , \quad \text{quand } x \to 0+\ .$$

III

1- Il s'agit de la série géométrique de raison $x/8$. Elle converge ssi $|x/8| < 1$. Son rayon de convergence est donc égal à 8.

2- Pour obtenir le rayon de convergence, il suffit de calculer la limite de $|a_n|/|a_{n+1}|$, où $a_n = \dfrac{1}{n^2 8^n}$. On a

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 8\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\,;$$

le rayon de convergence est donc égal à 8.

3- C'est la série géométrique de raison $x^3/8$. Elle converge ssi $|x|^3 < 8$. Son rayon de convergence est donc égal à 2.

4- On applique le critère de Cauchy à la série à termes positifs $\sum a_n$, où $a_n = \dfrac{|x|^{n^2}}{8^n}$. On a $a_n^{1/n} = \frac{|x|^n}{8}$, qui tend vers 0 si $|x| < 1$ et vers $+\infty$ si $|x| > 1$. Le rayon de convergence est donc égal à 1.

IV

1- On applique le critère de d'Alembert à la série à termes positifs $\sum a_n$, où

$$a_n = \frac{|x|^{2n+1}}{n(2n+1)} \,.$$

On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = x^2 \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} \,,$$

qui tend vers x^2 quand $n \to +\infty$. Le rayon de convergence est donc égal à 1.

2- D'après le cours, la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est une fonction définie et indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$. Ce résultat général s'applique ici et nous dit que f est définie et de classe C^2 sur l'intervalle $]-1,1[$. Ce même résultat nous dit encore que la dérivée de f s'obtient en dérivant la série terme à terme. Il vient donc, successivement,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} \quad , \quad f''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \quad , \forall x \in]-1,1[\,.$$

Au passage, on note que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour calculer $f''(x)$, on effectue la somme d'une série géométrique. Il vient

$$f''(x) = 2x(1 + x^2 + x^4 + \cdots) = \frac{2x}{1-x^2} \quad , \forall x \in]-1,1[\,.$$

3- Pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$\left|\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(2n+1)} \,.$$

La série numérique $\sum \frac{1}{n(2n+1)}$ est convergente, puisque son terme général est équivalent à $1/2n^2$ quand $n \to +\infty$. On peut conclure que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

4- Dans le calcul qui suit, on se place sur l'intervalle $]-1,1[$. Puisque f' est la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{1-x^2}$ qui s'annule en zéro, on a

$$f'(x) = -\ln(1-x^2) = -\ln(1-x) - \ln(1+x)\,.$$

Puisque $\int \ln t\, dt = t \ln t - t + cte$, on obtient, par changement de variable :

$$\int \ln(1+x)\, dx = (1+x)\ln(1+x) - (1+x) + cte\,,$$

$$\int \ln(1-x)\, dx = -(1-x)\ln(1-x) + (1-x) + cte$$

et donc (puisque $f(0) = 0$)

$$f(x) = -(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x) + 2x\,.$$

5- D'après la question 3, la fonction f est continue en 1. On a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = f(1) = \lim_{x\to 1-} \left(-(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x) + 2x\right).$$

Sachant que $t \ln t$ tend vers 0 quand $t \to 0$ (ici, on prend $t = 1 - x$), on conclut que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2\ln 2\,.$$