Université Paris 7
L2, MIAS et MASS

MI3 et MA4
2006-2007

Corrigé du partiel du 4 novembre

1) Remarquons que les trois premières séries sont à termes positifs.

1- Soit $a_n = \left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^n$, pour tout $n \geq 1$. On a $\ln(1 - (3/n)) \sim -3/n$, quand $n \to +\infty$, d'où $\lim_{n\to+\infty} a_n = e^{-3}$. La *suite* (a_n) ne tend pas vers 0, la *série* $\sum a_n$ est donc divergente.

2- Soit $a_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$ pour tout $n \geq 1$. On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!}\frac{(3n)!}{(n!)^3} = \frac{(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)}\,.$$

Il vient donc $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n = 1/9$. Puisque $1/9 < 1$, le critère de d'Alembert s'applique, et nous dit que la série $\sum a_n$ est convergente.

3- Soit $a_n = \dfrac{\ln^5 n}{n^{4/3}}$ pour tout $n \geq 1$. Il est connu que

$$\lim_{n\to+\infty} n^{5/4} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^5 n}{n^{1/12}} = 0\,.$$

On a donc

$$a_n \leq \frac{1}{n^{5/4}}$$

à partir d'un certain rang. Puisque $5/4 > 1$, la série de Riemann $\sum n^{-5/4}$ est convergente. Le critère de comparaison s'applique, et nous dit que la série $\sum a_n$ est convergente.

4- Soit $a_n = \tan \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, pour tout $n \geq 1$. Puisque la fonction tangente est impaire, on a $a_n = (-1)^n \tan \frac{1}{\sqrt{n}}$. Puisque la fonction tangente est croissante positive sur $[0,1]$, et continue en 0, on peut appliquer à la série $\sum a_n$ le théorème sur les séries alternées et conclure qu'elle est convergente.

2) a) Pour tout nombre complexe z, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{100}|z|^n \leq a_n|z|^n \leq 100|z|^n\,.$$

En utilisant le critère de comparaison et les propriétés connues des séries géométriques, on voit que la série $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ converge pour $|z| < 1$ et qu'elle diverge pour $|z| > 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est donc égal à 1.

b) Appliquons le critère de Cauchy à la série à terme positif $\sum u_n$, où $u_n = \left|z^{n^3}\right|$. On a $u_n^{1/n} = |z|^{n^2}$, de sorte que $u_n^{1/n}$ tend vers 0 si $|z| < 1$, vers $+\infty$ si $|z| > 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^{n^3}$ est donc égal à 1.

3) a) On a

$$\forall x \geq 0 \qquad f_n'(x) = \frac{1}{n^{3/2}} e^{-\frac{x}{n}} > 0\,,$$

de sorte que f_n est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Les valeurs limites sont $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

b) Soit $x \geq 0$. Puisque $f_n(x) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, on peut appliquer le critère d'équivalence. Partant du DL : $e^t = 1 + t + o(t)$, pour $t \to 0$, on obtient

$$f_n(x) \sim \frac{x}{n^{3/2}} \quad \text{quand} \quad n \to \infty\,.$$

Puisque la série (de Riemann) $\sum 1/n^{3/2}$ est convergente, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ l'est aussi.

c) Soit b un réel positif. D'après la première question, on a $\sup_{0\leq x\leq b} |f_n(x)| = f_n(b)$. Puisque la série $\sum f_n(b)$ est convergente, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, b]$.

d) Toujours d'après la première question, on a $\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = 1$. La série de terme général 1 étant divergente, on conclut que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

e) D'après le théorème de continuité pour les séries de fonctions, la continuité de chacune des fonctions f_n et la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur tout intervalle $[0, b]$ $(b > 0)$ impliquent la continuité de f sur tout intervalle $[0, b]$ $(b > 0)$. En raison du caractère local de la continuité, on conclut que f continue sur $[0, +\infty[$.

f) On a $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, pour tout $x \geq 0$, ce qui montre la convergence normale de la série $\sum f_n'$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Le théorème de dérivation des séries de fonctions nous donne la dérivabilité de f, ainsi que l'égalité

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\,.$$

Puisque $f_n'(x) > 0$ pour tout n et tout x, on en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$.

g) Puisque $f_n(x) \geq 0$ pour tout n et tout $x \geq 0$, on a

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \ \forall x \ \geq 0 \qquad f(x) \geq \sum_{n=1}^{m} f_n(x)\,.$$

Si $x \geq m$, il vient $x/n \geq x/m \geq 1$ et donc $1 - e^{-x/n} \geq 1 - e^{-1}$, quel que soit $n = 1, \ldots, m$. On obtient

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \ \forall x \ \geq m \qquad \sum_{n=1}^{m} f_n(x) \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

h) Puisque la série de Riemann $\sum 1/\sqrt{n}$ est divergente et à termes positifs, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty\,.$$

Compte tenu de la question précédente, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.