Corrigé du partiel du 10 novembre

1) **Question de cours 1.**

a) Le théorème s'énonce ainsi :
Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle $[a,b]\subset\mathbb{R}$ non vide. Si cette série converge normalement et si chacune des fonctions f_n est continue, on a

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\right) dx.$$

b) Soient $x\in\,]-1,1[$ et I_x l'intervalle d'extremités 0 et x. Comme, pour tout $t\in I_x$, $|-t^2|\leq x^2<1$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{2n}$ converge normalement sur I_x. Il résulte donc de a) que :

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n\geq 0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right) dt = \sum_{n\geq 0}^{\infty}\left(\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt\right) = \sum_{n\geq 0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2) **Question de cours 2.**

a) Le théorème de séries alternées s'énonce ainsi :
Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle décroissante tendant vers 0, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ est convergente.

b) Notons pour tout entier $n\geq 2$:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Ainsi, pour tout $n\geq 2$, $\sqrt{n}+(-1)^n\geq\sqrt{2}-1>0$ et $a_n>0$.

– Montrons que les conditions pour appliquer le théorème des séries alternées ne sont pas remplies. En effet, pour tout $n\geq 2$,

$$a_{n+1}\leq a_n \Leftrightarrow a_n^{-1}\leq a_{n+1}^{-1} \Leftrightarrow 2(-1)^n \leq \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leq 1.$$

L'inégalité $a_{n+1}\leq a_n$ est donc satisfaite *si et seulement si* n est impair. La suite $(a_n)_{n\geq 2}$ n'est donc pas décroissante, même en la considérant à partir d'un certain rang.

– Posons pour tout entier $n\geq 2$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - (-1)^n a_n\,.$$

Comme

$$u_n = (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\sim\frac{1}{n},$$

la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ dont le terme général est positif et équivalent à $1/n$ est divergente.

– La série $\sum_{n\geq 2}(-1)^n n^{-1/2}$ converge car elle relève du théorème sur les séries alternées. Supposons que la série $\sum_{n\geq 2}(-1)^n a_n$ converge. Alors, la série de terme général $(-1)^n n^{-1/2}-(-1)^n a_n = u_n$ converge aussi, ce qui, on vient de le voir, est faux. La série $\sum_{n\geq 2}(-1)^n a_n$ ne converge donc pas.

3) Notons de façon générique $\sum u_n$ chacune des séries à étudier.

• $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\geq 0$ pour tout $n\geq 1$. Comme $u_n^{1/n} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ tend vers $\mathrm{e}^{-1}<1$, on conclut grâce au critère de Cauchy que $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

• $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}>0$ pour tout $n\geq 1$. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 2\dfrac{2n+1}{n+1}$ tend vers $4>1$, on conclut grâce au critère de D'Alembert que $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne convergent pas.

• $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)\sqrt{n}}>0$ pour tout $n\geq 2$. Comme $u_n = \dfrac{n^{1/4}}{\ln n}\dfrac{1}{n^{3/4}}$ et que la suite $(\frac{n^{1/4}}{\ln n})_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$, il existe un rang $n_0\geq 2$ tel que, pour tout $n\geq n_0$, $\frac{n^{1/4}}{\ln n}\geq 1$ et $u_n\geq n^{-3/4}$. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} n^{-3/4}$ est divergente, il en est de même pour la série de terme général u_n.

• $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$ pour tout $n \geq 1$. Or, si $n \geq 1$, $2n+(-1)^n \geq 2n-1 \geq 2-1 > 0$ et $a_n = (-1)^n u_n > 0$. La série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$ est donc alternée. Comme $a_n \leq (2n-1)^{-1}$ pour tout $n \geq 1$, $(a_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0. De plus, si $n \geq 1$, $a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1} = 2(1+(-1)^{n+1}) \geq 0$, i.e. $a_{n+1} \leq a_n$. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante de limite nulle. Il résulte du théorème des séries alternées que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

• $u_n = \left(\dfrac{1}{n} - \sin\dfrac{1}{n}\right)$ pour tout $n \geq 1$. Comme $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$ (développement limité de sin en 0 à l'ordre 3), $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ au voisinage de 0 de sorte que $u_n \sim \frac{1}{6n^3}$ lorsque n tend vers $+\infty$. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} n^{-3}$ étant convergente, il en est de même pour la série de terme général u_n.

4) On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^3x^2} \quad \forall x \geq 0\,.$$

a) Comme $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(0)$ de terme général nul converge. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $0 \leq f_n(x) \leq x^{-1}n^{-3}$ pour tout $n \geq 1$ et que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} n^{-3}$ converge, il en est de même pour la série de terme général positif $f_n(x)$. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

b) $f_0 : \mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x$ est dérivable de dérivée constante égale à 1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n'(x) = \frac{1-n^3x^2}{(1+n^3x^2)^2}.$$

Comme $f_n(0) = 0$ et f_n tend vers 0 en $+\infty$, f_n est positive et admet un maximum global en $x = n^{-3/2}$:

$$\max_{x\geq 0} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Puisque la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} n^{-3/2}$ converge, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ et, puisque chaque fonction f_n est évidemment continue, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$|f_n'(x)| \leq \frac{1+n^3x^2}{(1+n^3x^2)^2} = \frac{1}{1+n^3x^2} \leq \frac{1}{n^3a^2},$$

de sorte que $\sup_{x\geq a} |f_n'(x)| \leq a^{-2}n^{-3}$. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge donc normalement sur $[a, +\infty[$. Comme chaque fonction f_n est continûment dérivable sur $[a, +\infty[$, la fonction f est dérivable sur $[a, +\infty[$. Comme cela vaut pour tout $a > 0$, f est finalement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Soit $x > 0$. La fonction $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto (1+x^2t^3)^{-1} = g(x,t)$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. De plus, si $t \geq 1$, $g(x,t) \leq x^{-2}t^{-3}$ de sorte que, pour tout $T > 1$,

$$0 \leq \int_1^T g(x,t)\,dt \leq \int_1^T x^{-2}t^{-3}\,dt = \frac{1}{2x^2}(1-T^{-2}) \leq \frac{1}{2x^2}.$$

D'où l'existence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{1+x^2t^3}$ et donc de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{1+x^2t^3} := g(x)$.

e) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $T > 0$, le changement de variable linéaire $u = x^{2/3}t$ montre que

$$\int_0^T \frac{dt}{1+x^2t^3} = x^{-2/3}\int_0^{x^{2/3}T} \frac{du}{1+u^3}.$$

Comme l'intégrale impropre $g(1) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} > 0$ existe, un passage à la limite lorsque T tend vers $+\infty$ prouve que $g(x) = x^{-2/3}g(1)$.

f) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction $g(\cdot, x)$ est strictement décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(t,x) \leq g(n,x)$ si $t \in [n, n+1]$ de sorte que $g(n,x) \geq \int_n^{n+1} g(t,x)\,dt$. En sommant ces inégalités, il vient que, si $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{0\leq n\leq N} f_n(x) = x\sum_{0\leq n\leq N} g(n,x) \geq x\sum_{0\leq n\leq N}\int_n^{n+1} g(t,x)\,dt = x\int_0^{N+1} g(t,x)\,dt$$

Par un passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$, il en résulte que $f(x) \geq xg(x)$. Le taux d'accroissement $Tf(x)$ de f entre 0 et x vérifie donc : $Tf(x) = f(x)x^{-1} \geq g(x) = g(1)x^{-2/3}$ et tend vers $+\infty$ en $0+$: f n'est donc pas dérivable (à droite) en 0.