

---

## Révisions

---

### Énoncés

**Exercice 1** – Montrer par récurrence les formules suivantes :

1.  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  (pour  $n \geq 1$ ).
2.  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  (pour  $n \geq 1$ ).

**Exercice 2** – Soient  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Montrer les implications suivantes :

1. Si  $c|a$  et  $c|b$ , alors  $c|(a + b)$ .
2. Si  $c|a$  et  $c|b$ , alors  $c|(a - b)$ .
3. Si  $a|c$ , alors  $a|bc$ .
4. Si  $a|c$  et  $b|c$ , alors  $ab|c^2$ .

**Exercice 3** – Soient  $a, b$  et  $c$  des entiers. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. Si  $a|b^2$ , alors  $a|b$ .
2. Si  $a|c$  et  $b|c$ , alors  $ab|c^2$ .
3. Si  $a|b$  et  $a|c$ , alors  $a^2|bc$ .
4. Si  $a|bc$  alors  $a|b$  ou  $a|c$ .
5. Si  $a$  est premier et  $a|bc$  alors  $a|b$  ou  $a|c$ .
6. 3 divise 0.
7.  $a|b$  si et seulement si  $a^2|b^2$ .

**Exercice 4** – Montrer par récurrence que, si  $a$  est un entier impair, alors  $2^{n+1}$  divise  $a^{2^n} - 1$ .

**Exercice 5** – Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , l'entier  $3^{3n+3} - 26n - 27$  est divisible par 169.

**Exercice 6** – Déterminer les entiers naturels  $n$  tels que  $n$  divise  $n + 8$ .

**Exercice 7** – Déterminer tous les entiers  $n$  tels que  $n + 1$  divise  $n^2 + 1$ .

**Exercice 8** – Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  les équations suivantes:

1.  $x^2 + y^2 = 2$ .

2.  $x^2 + y^2 = 3$ .

3.  $x^2 - y^2 = 2$ .

**Exercice 9** – Montrer que  $\sqrt{2}$  n'appartient pas à l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels.