Exercice 1.

1) $\mathcal{D}_\lambda : \begin{cases} (\lambda-1)x - 2z = 2 \\ y+z=0 \end{cases}$

L'espace vectoriel directeur D_λ est donné par les équations :

$$D_\lambda : \begin{cases} (\lambda-1)x - 2z = 0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Les deux équations sont linéairement indépendantes.
Puisqu'on est dans $\mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel D_λ est de dim 1
et un générateur est

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1-\lambda \\ \lambda-1 \end{pmatrix}$$

Un point de $\mathcal{D}_\lambda$ est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) $\mathcal{P}_\lambda : x + (\lambda-2)y = 1.$

L'espace directeur P_λ de $\mathcal{P}_\lambda$ est donné par l'équation

$$x + (\lambda-2)y = 0.$$

Il est de dimension 2 (on est dans $\mathbb{R}^3$) et on a

$$P_\lambda = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \lambda-2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

3) $$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2C_1+(\lambda-1)C_3 \to C_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda-2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1-(\lambda-1)C_2 \to C_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2-(\lambda-1)(\lambda-2) & \lambda-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que M_λ est de rg 3 si et seulement si $(\lambda-1)(\lambda-2)-2 = \lambda(\lambda-3) \neq 0$. Si $\lambda = 0, 3$, M_λ a rang 2.

4) $N_\lambda = \left(\begin{array}{cccc:c} \lambda-1 & 0 & -2 & & 2 \\ 0 & 1 & 1 & & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 0 & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3)]{\text{même op. que dans}} \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\lambda(\lambda-3) & \lambda-2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{C_4+C_3 \to C_4} \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\lambda(\lambda-3) & \lambda-2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{C_4-C_2 \to C_4} \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\lambda(\lambda-3) & \lambda-2 & 0 & 3-\lambda \end{array}\right)$

Si $\lambda \neq 0, 3$, $rg(N_\lambda) = 3$.

Si $\lambda = 0$, $rg(N_0) = 3$.

Si $\lambda = 3$, $rg(N_3) = 2$.

5) La matrice M_λ est la matrice du système linéaire décrivant l'intersection $P_\lambda \cap D_\lambda$.

Si $\lambda = 0, 3$ (i.e. $rg(M_\lambda) = 2$), $\dim(P_\lambda \cap D_\lambda) = 1$ donc

$P_\lambda \cap D_\lambda = D_\lambda$ car $\dim D_\lambda = 1$.

En particulier

$P_0 \cap D_0 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $P_3 \cap D_3 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6) $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{D}_\lambda = \emptyset \iff rg(M_\lambda) \neq rg(N_\lambda) \iff \lambda = 0$.

Les dimensions de P_0 et D_0 sont différentes, donc on ne peut pas avoir $P_0 = D_0$ (ce qui signifie que $\mathcal{P}_0, \mathcal{D}_0$ sont parallèles). Donc $\mathcal{P}_0, \mathcal{D}_0$ ne sont pas parallèles et on a seulement une inclusion $P_0 \supset D_0$.

Exercice 2

1)

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 - 2C_4 \to C_3]{C_1 + C_4 \to C_1} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{C_2 - 2C_1' \to C_2 \\ C_3 - C_1' \to C_3 \\ C_4 - C_1' \to C_4}]{C_1 - C_2 \to C_1} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[C_3 + C_2 \to C_3]{C_1 - C_2 \to C_1} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 3 & -2 & -3 & -1 \\ -4 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{C_2 + C_3 \to C_2 \\ C_4 + C_3 \to C_4}]{C_1 - C_3 \to C_1} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 6 & -5 & 3 & -4 \\ -8 & 7 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & -3 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

L'inverse de A est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -5 & 3 \\ 5 & -8 & 7 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & 8 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

2) Pour que $\mathcal{R}$ soit un repère cartésien de $\mathbb{R}^4$ il suffit (et il faut que $v_1, \dots, v_4$ soit une base de $\mathbb{R}^4$). Or les vecteurs $v_1, \dots, v_4$ sont libres car la matrice A est inversible.

3) Il s'agit d'écrire, pour $i = 1, \dots, 4$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP} + e_i$ dans la base $v_1, \dots, v_4$. Les coord de $\overrightarrow{OP} + e_i$ sont

$$A^{-1}(\overrightarrow{OP} + e_i) = A^{-1}\overrightarrow{OP} + \underbrace{A^{-1}e_i}_{\substack{i\text{-ème colonne} \\ \text{de } A^{-1}}}$$

$$A^{-1}\left(\overrightarrow{OP}\right) = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(\vec{OP}+e_1) = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 14 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}(\vec{OP}+e_2) = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(\vec{OP}+e_3) = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}(\vec{OP}+e_4) = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ \\ -5 \end{pmatrix}.$$

4) Soit $v_1^*, \dots, v_4^*$ la base duale à $v_1, \dots, v_4$. On a

$$v_i^* = e_i^* A^{-1} = i\text{-ème ligne de } A^{-1}.$$

Par définition

$$V_3^*(v_1) = V_3^*(v_2) = 0 \qquad V_4^*(v_1) = V_4^*(v_2) = 0.$$

En particulier, V_3^*, V_4^* appartiennent à $E^\perp$.

D'autre part $\dim E^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim E = 4-2=2$.

Puisque V_3^*, V_4^* sont lin. indép, on a $E^\perp = \mathrm{Vect}(V_3^*, V_4^*)$.

5)

$$\mathcal{E} = \begin{cases} (x-1) - y + z - (t+1) = 0 \\ -5(x-1) + 8y - 3z + 5(t+1) = 0 \end{cases}$$