Marco MACULAN

e-mail : marco.maculan@imj-prg.fr

→ page web : avancement du cours
polycopié + capture de tableau

(si j'oublie, écrivez moi !).

→ Moodle : même chose que dans la page web

pour y aller : taper marco maculan sur Google

Algèbre bilinéaire

L'algèbre linéaire c'est l'étude des systèmes linéaires :

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

On oublie les variables : les équations de (*) sont les entrées du vecteur suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Toute les propriétés du système se lisent sur la matrice A.

dim ker A [dimension de l'$\overbrace{\text{espace des solutions}}^{\ker A}$
$\shortparallel$
$\underbrace{\text{nombre de variables}}_{n \,=\, \text{nombre de colonnes}}$ $-$ $\underbrace{\text{rang du système}}_{\mathrm{rg}\, A}$

Je viens d'écrire le thm du rang : $\mathrm{rg}\, A = \dim \operatorname{im} A$.

Dans ce cours, deux changements :

1. il n'y aura qu'une équation dans notre système ☺

2. l'équation est de degré 2 ☹

tous les termes sont de degré 2

Comment s'y prendre ?

$$\underline{a}\, x^2 + \underline{b}\, xy + \underline{c}\, y^2 = 0$$

$$(x\ y) \begin{pmatrix} \underline{a} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & \underline{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + \tfrac{b}{2}y,\ \tfrac{b}{2}x + cy) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= ax^2 + \tfrac{b}{2}xy + \tfrac{b}{2}xy + cy^2$$

$$= ax^2 + 2\,\tfrac{b}{2}xy + cy^2$$

Cool !

$$\underline{a}\, x^2 + \underline{b}\, xy + \underline{c}\, xz + \underline{d}\, y^2 + \underline{e}\, yz + \underline{f}\, z^2 = 0$$

$$(x\ y\ z) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} & d & \frac{e}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$(ax + \tfrac{b}{2}y + \tfrac{c}{2}z,\ \tfrac{b}{2}x + dy + \tfrac{e}{2}z,\ \tfrac{c}{2}x + \tfrac{e}{2}y + fz) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= ax^2 + \underline{\tfrac{b}{2}xy} + \overline{\tfrac{c}{2}xz} + \underline{\tfrac{b}{2}xy} + dy^2 + \underline{\tfrac{e}{2}yz}$$

$$+ \overline{\tfrac{c}{2}xz} + \underline{\tfrac{e}{2}yz} + fz^2$$

$$= ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2 .$$

Déf : Une forme quadratique en n variables est un polynôme homogène de degré 2.

tous les termes ont le même degré

En pratique,

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \underbrace{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2}_{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 \text{ carrés}}$$

$$\left.\begin{aligned} &+ a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ &\qquad + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ &\qquad\qquad \ddots \quad + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}\right] \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j \text{ doubles produits}$$

La matrice associée à Q est :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} & & \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & & & \\ \frac{a_{13}}{2} & & \ddots & & \\ & & & & \frac{a_{n-1,n}}{2} \\ & & & \frac{a_{n-1,n}}{2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Rmq : la matrice A est symétrique, i.e. l'élément en position (i,j) est le même que l'élément en position (j,i).

De manière réciproque, si B est une matrice carrée symétrique, alors

$$(x_1,\dots,x_n)\ B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: Q(x_1,\dots,x_n)$$

est une forme quadratique en n variables.

Exemple : Supposons B carrée de taille 2, symétrique

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2)\ B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1b_{11} + x_2b_{12},\ x_1b_{12} + x_2b_{22}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= b_{11}x_1^2 + \underbrace{b_{12}x_1x_2 + b_{12}x_1x_2} + x_2^2 b_{22}$$

$$= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + x_2^2 b_{22}.$$

Donc c'est une forme quadratique en 2 variables.

Morale : on va étudier les matrices carrées symétriques.

Def : 1) Le noyau d'une forme quadratique est le noyau de sa matrice.

2) Le rang d'une forme quad. est le rang de sa matrice.

Exemples : Formes quadratiques en 2 variables.

(1) $Q(x,y) = x^2 + y^2$

$\text{Mat } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\ker Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

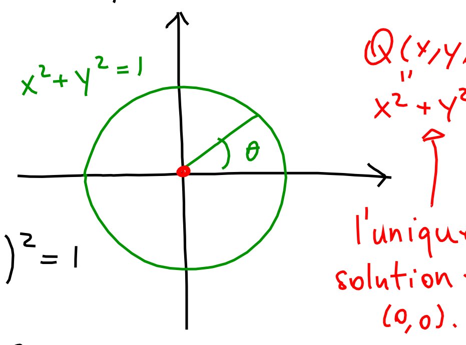
$= 0$

$\text{rg } Q = 2$

$Q(x,y) = 1$

$\overset{\shortparallel}{x^2 + y^2}$

Rappel : $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$



$Q(x,y) = 0$

$\overset{\shortparallel}{x^2+y^2}$

l'unique solution est $(0,0)$.

(2) $Q(x,y) = x^2 - y^2$

$\text{Mat } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\text{rg } Q = 2$ $\quad$ $\ker Q = 0$

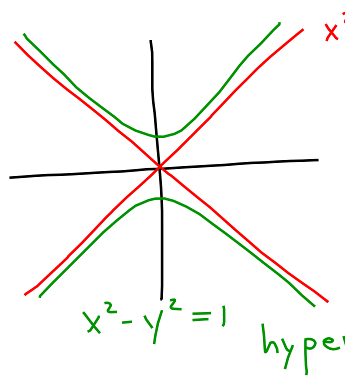
$Q(x,y) = x^2 - y^2 = 1$

$\quad\quad\quad \overset{\shortparallel}{(x-y)(x+y)}$

$Q(x,y) = 0$

↳ ou bien $x = y$

↳ ou bien $x = -y$



$\ulcorner$ $\sinh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

$\cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

$\sinh(t)^2 - \cosh(t)^2 = \dfrac{\cancel{e^{2t}} - 2 + \cancel{e^{-2t}} - \cancel{e^{2t}} - 2 - \cancel{e^{-2t}}}{4}$

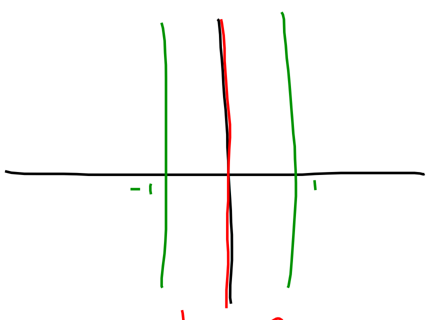
$= -\dfrac{4}{4} = -1$

$\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$ $\lrcorner$

(3) $Q(x,y) = x^2$ $\quad$ $\text{rg } Q = 1$

$\text{Mat } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\ker Q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.



$Q(x,y) = 1 \longrightarrow x = 1$ ou bien $x = -1$.

$\overset{\shortparallel}{x^2}$

$Q(x,y) = x^2 = 0$

$\longrightarrow x = 0$

Rmq : En général le noyau d'une forme quadratique est contenu dans l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) : Q(x_1, \dots, x_n) = 0\}$

Parce que,

$Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)\, \overset{\text{matrice de } Q}{A} \underbrace{\overset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}}$

$\ker A = \{x : Ax = 0\}$

Si $x \in \ker A$

$Q(x) = (x_1, \dots, x_n) \underbrace{Ax}_{\overset{\shortparallel}{0}} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$

Donc x appartient à $\{x : Q(x) = 0\}$

Def : L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 0\} =: N(Q)$.

est appelé le cône isotrope de Q.

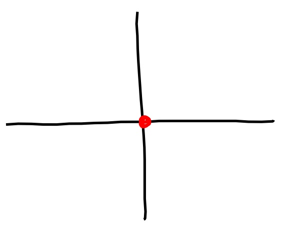
On vient de découvrir que

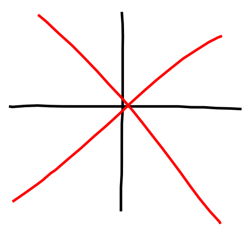
$\ker Q \subseteq N(Q)$.

Est-ce égal ?

Dans le deuxième exemple

$\ker Q = 0$ $\quad\quad$ $N(Q) =$ réunion des deux bissectrices.





Gardez ça bien en tête !

Exemple :

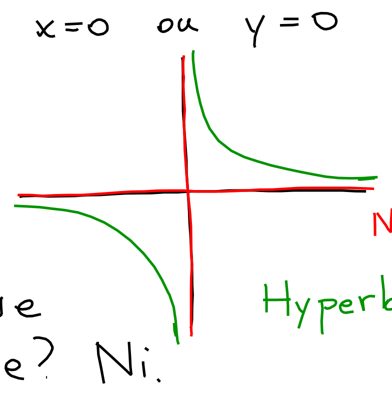
(4) $Q(x,y) = xy$ $\quad$ $\text{rg } Q = 2$

$\text{Mat } Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\ker Q = 0$

$Q(x,y) = 0 \longrightarrow x = 0$ ou $y = 0$

$Q(x,y) = 1$

$\overset{\shortparallel}{xy}$ $\quad$ $y = \frac{1}{x}$



Est-ce la même chose que toute à l'heure ? Ni.

L'équation est différente, mais faisons le changement de coordonnées suivant :

$x = t + u$ $\quad\quad$ $xy = (t+u)(t-u) = t^2 - u^2$

$y = t - u$

Donc dans les coordonnées t, u, c'est le même que la forme quadratique dans l'Exemple 2.