Recap : Une forme quadratique à n variable est

$$Q(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n)\, A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = {}^t x A x.$$

où A est une matrice $n \times n$ symétrique.

Le rang et le noyau de Q sont le rang et le noyau de A. La forme bilinéaire (symétrique) est

$$\varphi(x,y) = {}^t x A y = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \right].$$

Si $V \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors l'orthogonal par rapport à φ est

$$V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n : \varphi(v,w) = \varphi(w,v) = 0 \ \forall v \in V \}.$$

Rmq : si $v_1,\dots,v_d$ est une base de V, alors

$$V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n : \varphi(v_i,w) = 0 \quad \forall i = 1,\dots,d \}.$$

Pour démontre cela : c'est clair que $V^\perp$ est contenu dans le membre de droite de l'égalité ; de manière réciproque, étant donné $v \in V$,

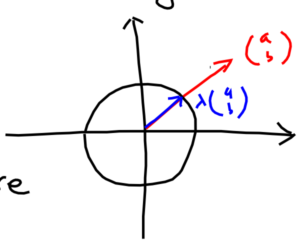
$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_d v_d.$$

Si $w \in \mathbb{R}^n$ est tq $\varphi(v_i,w) = 0 \ \forall i = 1,\dots,d$ on a

$$\varphi(v,w) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_d v_d, w)$$

$$\overset{\varphi \text{ linéaire dans la } 1^{\text{ère}} \text{ var.}}{=} \lambda_1 \underbrace{\varphi(v_1,w)}_{0} + \dots + \lambda_d \underbrace{\varphi(v_d,w)}_{0} = 0.$$

Exemple : On considère la forme quadratique $Q(x,y) = x^2 + y^2$. On veut calculer l'orthogonal d'une droite $L = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



On peut choisir $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tq $a^2 + b^2 = 1$.

[Sinon : soit $\underset{\neq 0}{\lambda} \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$ engendre la même droite que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

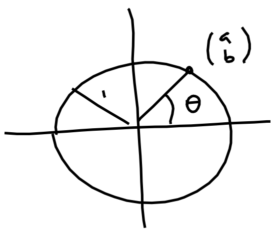
$$(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2 = 1 \iff \lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}. \ ]$$

Maintenant on calcule l'orthogonal :

$$L = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \underset{\text{Rmq}}{\Longrightarrow} L^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \varphi\big((x,y),(a,b)\big) = 0 \right\}$$

$$\varphi\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

$$\varphi\big((x,y),(a,b)\big) = ax + by = 0.$$



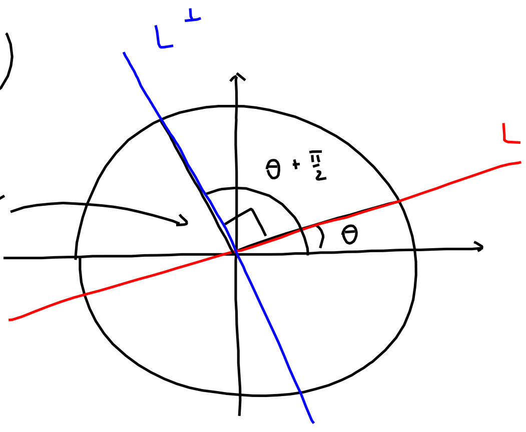
Donc $L^\perp = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Maintenant

$$a^2 + b^2 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases}$$

$$-b = -\sin\theta = \cos\left(\theta + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \cos\theta = \sin\left(\theta + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

Faisons un dessin.

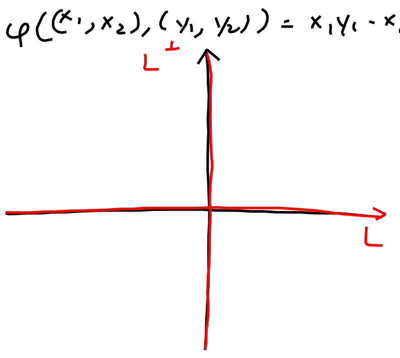


Morale : Pour $Q(x,y) = x^2 + y^2$ l'orthogonal n'est rien d'autre que le perpendiculaire.

Exemple : $Q(x,y) = x^2 - y^2$. $\to \varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$

- $L = \mathrm{Vect}(e_1)$

  $L^\perp = \left\{ \binom{x}{y} : x = 0 \right\} = \mathrm{Vect}(e_2)$



- $L = \mathrm{Vect}(e_2)$

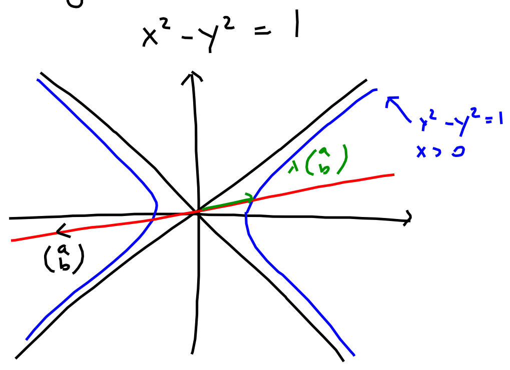
  $L^\perp = \left\{ \binom{x}{y} : y = 0 \right\}$

- $L = \mathrm{Vect}\binom{a}{b}$

  $L^\perp = \left\{ \binom{x}{y} : ax - by = 0 \right\}$

  On peut toujours supposer $a > 0$ et $a^2 - b^2 = 1$.

  [Sinon : pour $\lambda \neq 0$, $\lambda \binom{a}{b}$ engendre la même droite que $\binom{a}{b}$.



$Q\left(\lambda\binom{a}{b}\right) = \lambda^2(a^2 - b^2)$

si $a^2 - b^2 > 0$ (i.e. $|a| > |b|$)

$$\lambda = \frac{\mathrm{signe}(a)}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

de manière que $\lambda a > 0$.

si $a^2 - b^2 < 0$ on prend

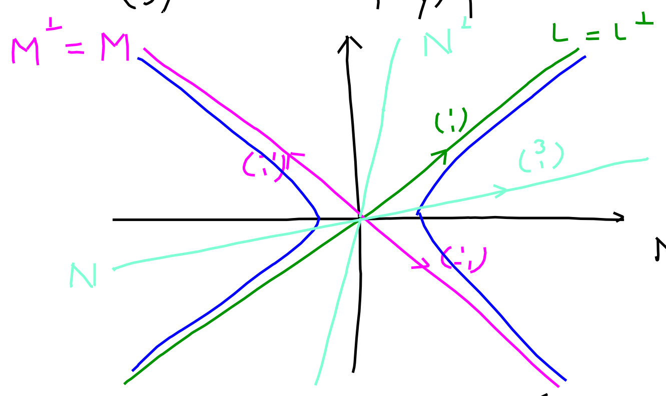
$$\lambda = \frac{\mathrm{signe}(a)}{\sqrt{|a^2 - b^2|}}$$ ← Cette formule marche aussi pour $a^2 - b^2 > 0$.

Rappel : $\cosh(\theta) = \dfrac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} > 0$ $\Longrightarrow$ $(\cosh\theta)^2 - (\sinh\theta)^2 = 1$.

$\sinh(\theta) = \dfrac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$

Donc si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tq $a^2 - b^2 = 1$ et $a > 0$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tq $a = \cosh(\theta)$ $b = \sinh(\theta)$.

$L = \mathrm{Vect}\binom{a}{b}$ $L^\perp = \left\{ \binom{x}{y} \middle| ax - by = 0 \right\} = \mathrm{Vect}\binom{b}{a}$



L est orthogonale à soi même !

M aussi !!

$N^\perp = \mathrm{Vect}\binom{1}{3}$

1) J'ai dit une connerie ! Étant donné $\binom{a}{b} \neq \binom{0}{0}$ on peut pas toujours le mettre sous la forme $a^2 - b^2 = 1$ avec $a > 0$.

Par exemple : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$ $a^2 - b^2 = 1 - 9 = -8$

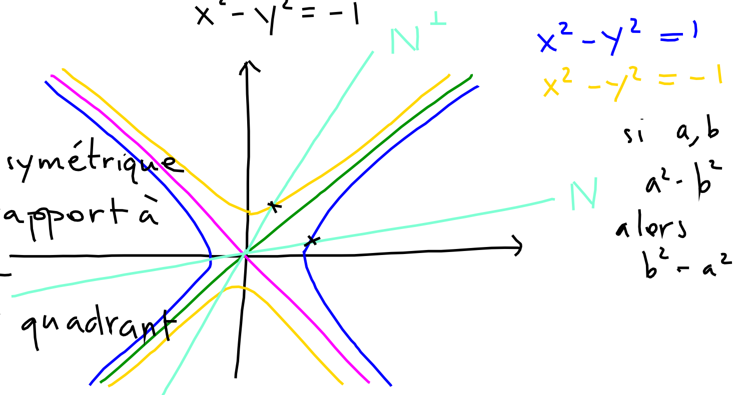
$$\lambda = \frac{\mathrm{signe}(a)}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}\binom{1}{3}$ satisfait : $\frac{1}{8} - \frac{9}{8} = -1$

$x^2 - y^2 = -1$

Morale :

$L^\perp$ est le symétrique à L par rapport à la bisectrice du premier quadrant $x - y = 0$.



si a, b t.q. $a^2 - b^2 = 1$ alors $b^2 - a^2 = 1$.

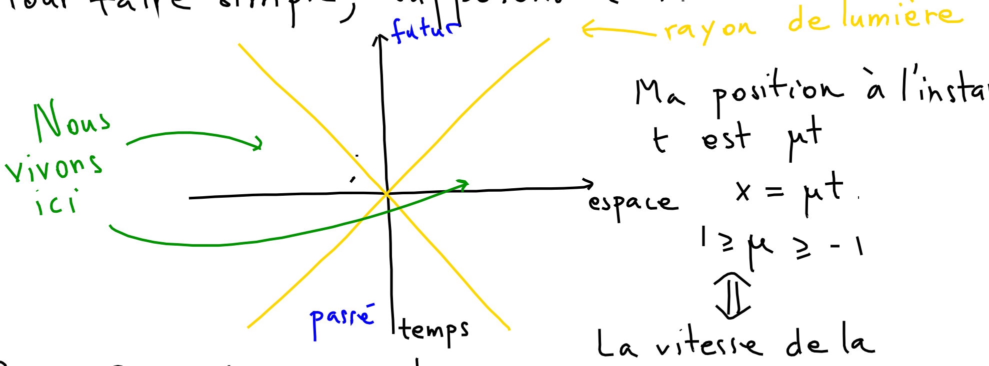
Les droites $x - y = 0$ et $x + y = 0$ sont orthogonales à elles mêmes. (On appelera les droites de ce type isotrope)

Cette forme quadratique elle joue un rôle central dans la relativité spéciale de Einstein.

Imaginons dans un espace de dimension 1 donc $\mathbb{R}$. On représente aussi le temps par $\mathbb{R}$.

La forme quadratique considérée par Einstein est $Q(x,y) = x^2 - \frac{1}{c^2}y^2$ où c est la vitesse de la lumière.

Pour faire simple, supposons $c = 1$.



Ma position à l'instant t est μt

$x = \mu t$

$1 \geq \mu \geq -1$

$\Updownarrow$

La vitesse de la lumière ne peut pas être dépassée.

Rmq : On veut comprendre la nature de la différence entre ces exemples.

Formule pour la dimension de l'orthogonal.

Prop. Soit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel.
et φ une forme bilinéaire à n variables.
Alors,
1) $\dim V^\perp \geq n - \dim(V)$.
2) si φ est non dégénérée, on a égalité :
$$\dim V^\perp = n - \dim V.$$

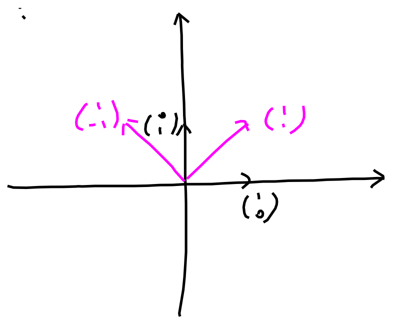
Déf. Une forme quadratique $Q(x) = {}^t x A x$ est non dégénérée si $\ker(A) = 0$ $(\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = n)$

Exemple : $Q(x,y) = x^2 + y^2 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow Q$ non dég.
et on a vu que l'orthogonal d'un sous-espace de dim 1 a dimension $1 = 2 - 1$. De même pour $Q(x,y) = x^2 - y^2$.

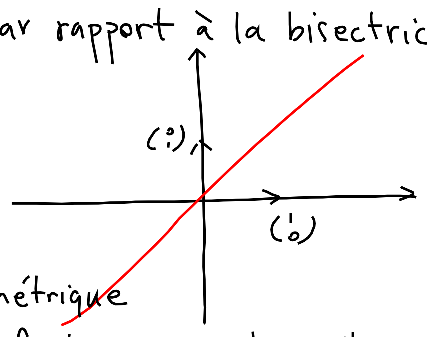
démo. On choisit une base de V, $v_1, \dots, v_d$, et on la complète à une base de $\mathbb{R}^n$:
$$\underbrace{v_1, \dots, v_d}_{V}, v_{d+1}, \dots, v_n.$$
Or, $V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(v_i, w) = 0 \ \forall i = 1, \dots, n \}$.
Soit $w = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.
$$(*) \begin{cases} \varphi(v_1, w) = x_1 \varphi(v_1, v_1) + x_2 \varphi(v_1, v_2) + \dots + x_n \varphi(v_1, v_n) = 0 \\ \varphi(v_2, w) = x_1 \varphi(v_2, v_1) + x_2 \varphi(v_2, v_2) + \dots + x_n \varphi(v_2, v_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi(v_d, w) = x_1 \varphi(v_d, v_1) + x_2 \varphi(v_d, v_2) + \dots + x_n \varphi(v_d, v_n) = 0 \end{cases}$$
La matrice de ce système linéaire est :
$$B = \begin{pmatrix} \varphi(v_1, v_1) & \varphi(v_1, v_2) & \dots & \varphi(v_1, v_n) \\ \varphi(v_2, v_1) & \varphi(v_2, v_2) & \dots & \varphi(v_2, v_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi(v_d, v_1) & \varphi(v_d, v_2) & \dots & \varphi(v_d, v_n) \end{pmatrix}$$
Le théorème du rang dit que la dimension du noyau de B (i.e. la dimension de l'espace des solutions de $(*)$) est $n - \operatorname{rg}(B)$. La matrice B a d lignes donc
$$\operatorname{rg} B \leq d.$$
$$\Longrightarrow \dim V^\perp = n - \operatorname{rg} B \geq n - \underset{\dim V}{d} = n - \dim V.$$
Cela démontre (1). Pour (2), φ est non-dégénérée donc les lignes de B sont linéairement indépendantes, et donc $\operatorname{rg} B = d$
$$\Longrightarrow \dim V^\perp = n - \operatorname{rg} B = n - d = n - \dim V. \qquad \square$$

Def : Des vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux (par rapport à une forme bilinéaire φ) si $\varphi(v,w) = 0$.
Une base $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ est orthogonale si
$$\varphi(v_i, v_j) = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

Exemple : $Q(x,y) = x^2 + y^2$
Une base orthogonale est la donnée de deux vecteurs perpendiculaires :
- $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$
- $\binom{1}{1}, \binom{1}{-1}$
- $\binom{a}{b}, \binom{-b}{a}$



Exemple : $Q(x,y) = x^2 - y^2$
Une base orthogonale est la donnée de deux vecteurs distincts, symétriques par rapport à la bisectrice du premier quadrant.
- $\binom{1}{0}$ et $\binom{0}{1}$
- $\binom{a}{b}$ et $\binom{b}{a}$



⚠ Le vecteur $\binom{1}{1}$ est symétrique à lui-même, donc il ne fait pas partie d'une base orthogonale. (Parce que il est orthogonale à lui-même)
De même pour $\binom{1}{-1}$.

Matrice d'une forme quadratique dans une base quelconque

Une forme quadratique $Q(x) = {}^t x A x$ admet une matrice aussi par rapport à une base quelconque $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\varphi(x,y) = {}^t x A y$ la forme bilinéaire associée à Q. Alors, si $A = (a_{ij})$,

$$a_{ij} = {}^t e_i A e_j = \varphi(e_i, e_j).$$

Def La matrice de Q dans la base $v_1, \dots, v_n$ est $B = (b_{ij})$ avec

$$b_{ij} = {}^t v_i A v_j = \varphi(v_i, v_j).$$

Rmq: Si P est la matrice de passage de la base canonique à $v_1, \dots, v_n$ alors

$P v_i = e_i$. $\quad b_{ij} = {}^t(P^{-1} e_i) A (P^{-1} e_j) = {}^t e_i {}^t P^{-1} A P^{-1} e_j$.

$$\Longrightarrow \quad B = {}^t P^{-1} A P^{-1}.$$

$v_i = Q e_i \qquad B = {}^t Q A Q$.

Rmq: Si $v_1, \dots, v_n$ est une base orthogonale

$$B = (b_{ij}) \qquad b_{ij} = \varphi(v_i, v_j) = 0 \quad i \neq j.$$

$$B = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \Longrightarrow B \text{ diagonale}.$$

De manière réciproque, B diagonale $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ orthogonale