Dernière fois :

$(\cdot|\cdot)$ produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

$\stackrel{!}{=}$ forme bilinéaire à n variables définie positive

i.e. $(v|v) > 0$ si $v \neq 0$.

$\|v\| = \sqrt{(v|v)}$ norme de v "longueur de v"

<u>Théorème de Pythagore</u> : $v, w \in \mathbb{R}^n$ orthogonaux (i.e. $(v|w)=0$) alors

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 .$$

Plus généralement, pour $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ à deux à deux orthogonaux,

$$\|v_1 + \cdots + v_r\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_r\|^2 .$$

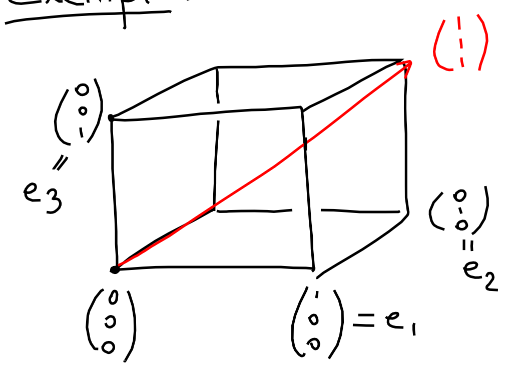
<u>démo</u>. $\|v_1+\cdots+v_r\|^2 = (v_1+\cdots+v_r \mid v_1+\cdots+v_r)$

$$= \sum_{i,j=1}^{r} (v_i|v_j) = (v_1|v_1) + \cdots + (v_r|v_r)$$

$(v_i|v_j) = 0$ si $i \neq j$.

$$= \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_r\|^2 . \qquad \square$$

<u>Exemple</u> : $\|(x_1,x_2,x_3)\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$



$$\Big\|\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{= e_1+e_2+e_3}\Big\|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

e_1, e_2, e_3 orthogonaux pour le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^3$

$\Longrightarrow$ la longueur de la diagonale du cube est $\sqrt{3}$.

Angle entre deux vecteurs.

Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $v, w \in \mathbb{R}^n$ non nuls. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\frac{|(v|w)|}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1.$$

Autrement dit, $-1 \leq \dfrac{(v|w)}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1$.

Def: L'angle entre les vecteurs v, w est

$$\theta = \arccos\left(\frac{(v|w)}{\|v\|\cdot\|w\|}\right) \in \mathbb{R}.$$

Rmq: La fonction $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$, $x \longmapsto \cos(x)$

n'est pas injective car $\cos(x) = \cos(x+2\pi)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Par contre elle est injective si on restreint son domaine à $[0,\pi]$.

$$\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1], \quad x \longmapsto \cos(x)$$

La fonction $\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ est injective, surjective donc bijective. Il existe une fonction inverse $f : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ t.q.

$$\cos(f(t)) = t \qquad f(\cos(x)) = x.$$

La fonction f est notée arc cos et appelée arc cosinus. Par exemple

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{car} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Pourquoi pas $-\frac{\pi}{2}$? Car $-\frac{\pi}{2} \notin [0,\pi]$.

$$\arccos(1) = 0$$
$$\arccos(-1) = \pi$$

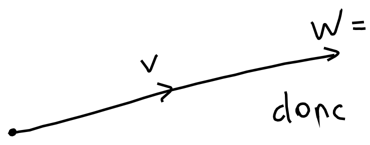
Exemples d'angles: Supposons v, w orthogonaux i.e. $(v|w) = 0$. L'angle entre v, w est

$$\frac{\pi}{2} = \arccos\left(\frac{\overset{0}{\cancel{(v|w)}}}{\|v\|\,\|w\|}\right) = \arccos(0).$$

Supposons $\dfrac{(v|w)}{\|v\|\,\|w\|} = 1$. On a $w = \lambda v$ avec $\lambda > 0$. Parce que, pour $w = \lambda v$ on a,

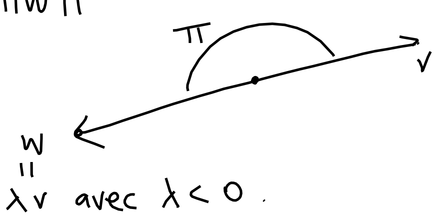
$$\frac{(v|w)}{\|v\|\,\|w\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot \frac{\cancel{(v|v)}}{\cancel{\|v\|^2}} = \text{signe de } \lambda.$$

Du coup si $\dfrac{(v|w)}{\|v\|\,\|w\|} = 1$, l'angle entre v et w est $\arccos(1) = 0$



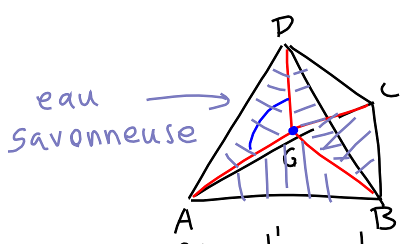
$(\lambda > 0)$ donc il y a un angle 0 entre v et w.

Si $\dfrac{(v|w)}{\|v\|\,\|w\|} = -1$, $\arccos(-1) = \pi$



$w = \lambda v$ avec $\lambda < 0$.

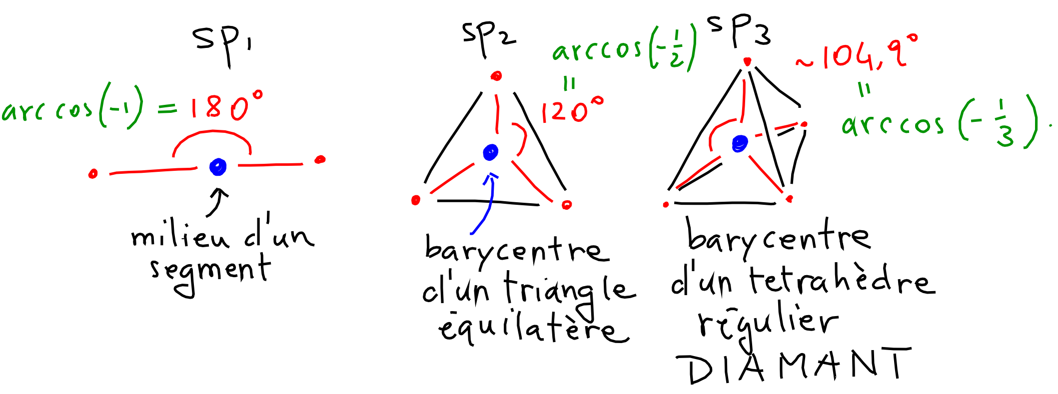
Exercice: étant donné un tetrahèdre régulier



i.e. solide avec 4 sommets, 4 faces égales qui sont des triangles équilatères, trouver l'angle entre deux segments joignant le barycentre du tetrahèdre aux sommets. $G = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$.

Réponse: $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \sim 104{,}9°$

Hybridation du carbone



Procédé de Gram-Schmidt

<u>Idée</u>: fabriquer des bases orthonormées.

Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire.

<u>Exemple</u>. Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ linéairement indépendants. On veut transformer v_1, v_2 en des vecteurs $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ tq.

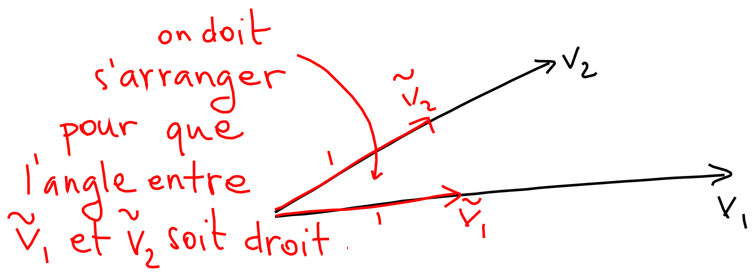
$$\|\tilde{v}_1\| = \|\tilde{v}_2\| = 1 \quad \text{et} \quad (\tilde{v}_1|\tilde{v}_2) = 0.$$

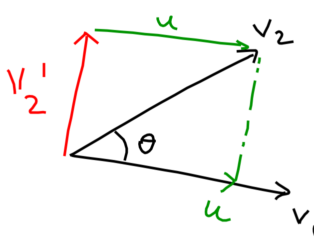
$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \longrightarrow \|\tilde{v}_1\| = \frac{1}{\cancel{\|v_1\|}} \cdot \cancel{\|v_1\|} = 1.$$

On pourrait prendre $\tilde{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$. Si on fait sa

$$(\tilde{v}_1|\tilde{v}_2) = \frac{(v_1|v_2)}{\|v_1\|\,\|v_2\|} = \cos\left(\begin{matrix}\text{angle entre}\\ v_1 \text{ et } v_2\end{matrix}\right)$$

ce n'est pas forcément 0.





$$v_2' = v_2 - u$$

$$u = \underbrace{\frac{(v_1|v_2)}{\|v_1\|\,\|v_2\|}}_{\cos\theta} \cdot \frac{v_1}{\|v_1\|} \cdot \|v_2\|$$

J'affirme que v_2' est orthogonale à v_1.

$$(v_2'|v_1) = (v_2 - u|v_1) = (v_2|v_1) - (u|v_1)$$

$$= (v_2|v_1) - \frac{(v_1|v_2)}{\cancel{\|v_1\|}\,\cancel{\|v_2\|}} \cdot (v_1|\cancel{v_1}) \cdot \frac{\cancel{\|v_2\|}}{\cancel{\|v_1\|}}$$

$$= (v_2|v_1) - (v_1|v_2) = 0.$$

$$v_2' = v_2 - \frac{(v_2|v_1)}{(v_1|v_1)} v_1.$$

On a trouvé $(v_1|v_2') = 0$. Pour conclure il suffit de poser $\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\quad \tilde{v}_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$.

Procédé en général:

Soit $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs linéairement indépendents. Il existe une unique famille de vecteurs $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r$ t.q.

1) $(\tilde{v}_i|\tilde{v}_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j. \\ 1 & i = j. \end{cases}$

2) $\tilde{v}_k$ est combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_k$.

3) $(\tilde{v}_k|v_k) > 0$.

<u>démo</u>. • $\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

$$v_2' = v_2 - (v_2|\tilde{v}_1)\tilde{v}_1 = v_2 - \frac{(v_2|v_1)}{(v_1|v_1)} \cdot v_1.$$

• $\tilde{v}_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$.

$$v_3' = v_3 - (v_3|\tilde{v}_1)\tilde{v}_1 - (v_3|\tilde{v}_2)\tilde{v}_2$$

<u>Rmq</u>: v_3' est orthogonale à $\tilde{v}_1$ et $\tilde{v}_2$.

$$(v_3'|\tilde{v}_1) = (v_3|\tilde{v}_1) - (v_3|\tilde{v}_1)\boxed{(\tilde{v}_1|\tilde{v}_1)} = 1$$

$$- (v_3|\tilde{v}_2)\boxed{(\tilde{v}_2|\tilde{v}_1)} = 0$$

$$= (v_3|\tilde{v}_1) - (v_3|\tilde{v}_1) = 0.$$

De même pour $\tilde{v}_2$. On pose

$$v_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|}.$$

$\vdots$

$$v_k' = v_k - (v_k|\tilde{v}_1)\tilde{v}_1 - \cdots - (v_k|\tilde{v}_{k-1})\tilde{v}_{k-1}.$$

Comme avant v_k' est orthogonal à $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{k-1}$.

On pose $\tilde{v}_k = \frac{v_k'}{\|v_k'\|}$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ e \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{7 + e^2 + \frac{\pi^2}{9}} = \sqrt{a}$$

$$v_2' = v_2 - \frac{(v_2|v_1)}{(v_1|v_1)} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{\overbrace{\boxed{2\sqrt{7} + 7e - \pi}}^{b}}{\underbrace{\boxed{7 + e^2 + \frac{\pi^2}{9}}}_{a}} \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ e \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - \frac{b}{a}\sqrt{7} \\ 7 - \frac{b}{a} e \\ -3 - \frac{b}{a}\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

$$(v_2'|v_1) = \underbrace{\boxed{2\sqrt{7} + 7e - \pi}}_{b} - \frac{b}{a}\Big(\overbrace{\boxed{7 + e^2 + \frac{\pi^2}{9}}}^{a}\Big)$$

$$= b - b = 0.$$

$$\tilde{v}_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} \qquad \|v_2'\| = \sqrt{\underbrace{\boxed{\left(2 - \frac{b}{a}\sqrt{7}\right)^2 + \left(7 - \frac{b}{a}e\right)^2 + \left(-3 - \frac{b}{a}\frac{\pi}{3}\right)^2}}_{c}}$$

$$v_3' = v_3 - (v_3|\tilde{v}_1)\,\tilde{v}_1 - (v_3|\tilde{v}_2)\,\tilde{v}_2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{7}/\pi + \pi/3}{a} \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ e \\ \pi/3 \end{pmatrix} - \frac{\frac{1}{\pi}\left(2 - \frac{b}{a}\sqrt{7}\right) + \left(-3 - \frac{b}{a}\frac{\pi}{3}\right)}{c} \begin{pmatrix} 2 - \frac{b}{a}\sqrt{7} \\ 7 - \frac{b}{a}\cdot e \\ -3 - \frac{b}{a}\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Exemple:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$v_2' = v_2 - \frac{(v_2|v_1)}{3} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = v_2''$$

$$v_3' = v_3 - \frac{(v_3|v_1)}{3} v_1 - \frac{(v_3|v_2'')}{6} v_2''$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rmq: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc v_1, v_2, v_3 ne sont pas linéairement indépandents.