Rappel : E = $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dim finie n

$Q : E \to \mathbb{R}$ forme quadratique

Méthode : il existe $\ell_1, \dots, \ell_r : E \to \mathbb{R}$ formes linéaires linéairement indépendantes t.q. $Q(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i \ell_i(x)^2$, $a_i \in \mathbb{R}$.

Soit $\ell_{r+1}, \dots, \ell_n$ des formes linéaires t.q. $\ell_1, \dots, \ell_n$ est une base de E^*. Soit $v_1, \dots, v_n \in E$ t.q

$$\ell_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a :

$$\varphi(v_i, v_j) = \begin{cases} a_i & i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad a_{r+1} = \dots = a_n = 0.$$

Supposons $E = \mathbb{R}^n$. Soit A la matrice de Q dans la base canonique. Soit P la matrice de chgt de base de $e_1, \dots, e_n$ à $v_1, \dots, v_n$. Alors, par la formule de chgt de base pour les formes quad :

$$\underbrace{{}^tPAP} = \begin{pmatrix} \varphi(v_1,v_1) & \boxed{\varphi(v_1,v_2)} & \dots & \boxed{\varphi(v_1,v_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\varphi(v_n,v_1)} & \boxed{\varphi(v_n,v_2)} & \dots & \varphi(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

0

Donc la matrice ${}^tPAP$ est diagonale.

$2^{\text{ème}}$ Rmq : $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Vect}(v_i : a_i = 0)$.

$$\operatorname{Ker} Q = \{ v \in E \mid \varphi(v,x) = 0 \quad \forall x \in E \}.$$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(x)^2 a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2.$$

$x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ $\qquad \ell_i(x) = x_i$.

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i. \qquad \text{Supposons } a_1 \cdots a_r \neq 0, \quad a_{r+1} = \dots = a_n = 0.$$

$y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i.$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i x_i y_i.$$

Je montre que $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$.

$(\supseteq)$ $x \in \operatorname{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n) \to x = x_{r+1} v_{r+1} + \dots + x_n v_n$.

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot 0 \cdot y_i = 0 \qquad \forall y \in E$$

$\Longrightarrow x \in \operatorname{Ker} Q$.

$(\subseteq)$ Soit $x \in E \setminus \operatorname{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$.

$x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Il existe $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ t.q. $x_{i_0} \neq 0$.

$$\varphi(x, v_{i_0}) = \underset{\substack{\neq \\ 0}}{a_{i_0}} \cdot \underset{\substack{\neq \\ 0}}{x_{i_0}} \neq 0 \Longrightarrow x \notin \operatorname{Ker} Q. \quad \square$$

$$\operatorname{rg} Q = n - \dim \operatorname{Ker} Q = n - (n-r) = r.$$

Morale : Le rang de Q est le nombre de carrés dans la décomposition en carrés.

Signature : E = $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dim finie

Q = forme quadratique sur E.

déf. $\mathrm{Sign}(Q) = (p,q)$

$$p = \max\left\{ \dim F \;\middle|\; \begin{array}{l} F \subseteq E \text{ sous-espace t.q.} \\ Q \text{ est } \underbrace{\text{déf positive sur } F}_{} \end{array} \right\}.$$

$Q(x) \geq 0$ $\forall x \in F$ et si $Q(x)=0$ alors $x=0$

$$q = \max\left\{ \dim F \;\middle|\; \begin{array}{l} F \subseteq E \text{ sous-espace t.q.} \\ Q \text{ est déf. négative sur } F \end{array} \right\}.$$

Lemme : Soient $E_1, E_2 \subseteq E$ des sous-espaces vectoriels.

Supposons :

1) Q est définie positive sur E_1;

2) Q est négative sur E_2.

3) $E_1 + E_2 = E$.

Alors $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $\mathrm{sign}(Q) = (\dim E_1, q)$.

démo. $x \in E_1 \cap E_2 \implies 0 \leq Q(x) \leq 0 \implies Q(x) = 0$

$\implies x = 0. \implies E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

$$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim(\underbrace{E_1 + E_2}_{E}) + \dim(\underbrace{E_1 \cap E_2}_{0}).$$

$$= \dim E.$$

Soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel t.q. Q est déf positive sur F

$x \in F \cap E_2 \implies Q(x) = 0 \implies x = 0 \Rightarrow F \cap E_2 = 0$.

$$\dim F = \dim(\underbrace{F + E_2}_{\subseteq E}) - \dim E_2 + \dim(\underbrace{E_2 \cap F}_{0})$$

$$\leq \dim E - \dim E_2 = \dim E_1$$

$$\implies \dim E_2 = \max\left\{ \dim F \;\middle|\; \begin{array}{l} F \subseteq E \text{ sous-esp. vect. t.q.} \\ Q \text{ est déf positive sur } F \end{array} \right\}$$

□

Lemme : Soient $\ell_1, \dots, \ell_{p+q}$ des formes linéaires lin. indép. sur E t.q.

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p+q} a_i \ell_i(x)^2 \qquad \begin{array}{ll} a_i > 0 & i = 1, \dots, p \\ a_i < 0 & i = p+1, \dots, p+q. \end{array}$$

Alors $\mathrm{sign}(Q) = (p,q)$ et $\mathrm{rg}\, Q = p+q$.

démo. Soient $\ell_{p+q+1}, \dots, \ell_n$ des formes linéaires qui complètent la base. Soit $v_1, \dots, v_n \in E$ t.q.

$$\ell_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

$E_1 = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ $\qquad$ $E_2 = \mathrm{Vect}(v_{p+1}, \dots, v_n)$.

$x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$

$$Q(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \overset{>0}{a_i}\, x_i^2}_{\substack{\geq 0 \text{ et } = 0 \\ \text{ssi } x_1 = \cdots = x_p = 0}} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{p+q} \overset{<0}{a_i}\, x_i^2}_{\substack{\leq 0 \text{ et } = 0 \\ \text{ssi } x_{p+1} = \cdots = x_{p+q} = 0}}$$

$\longrightarrow$ Q est définie positive sur E_1

$\longrightarrow$ Q est négative sur E_2 (mais pas forcément définie négative).

On peut appliquer le lemme et on trouve :

$\mathrm{sign}(Q) = (p, ?)$

En appliquant cela à $-Q$ on trouve :

$\mathrm{sign}(-Q) = (q, p)$

Donc $\mathrm{sign}(Q) = (p,q)$. □

Coniques

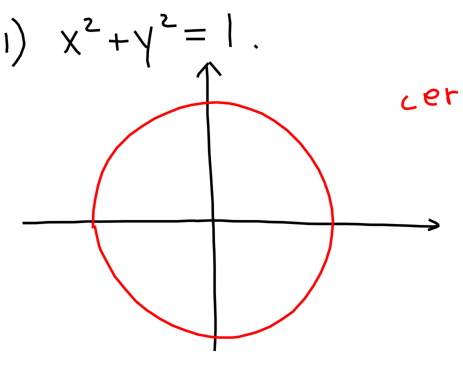
déf. Une conique (affine réelle) est le lieu des zéros d'un polynôme non nul de deg 2 en 2 variables :

$$a x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Exemple : 1) $x^2+y^2=1$.

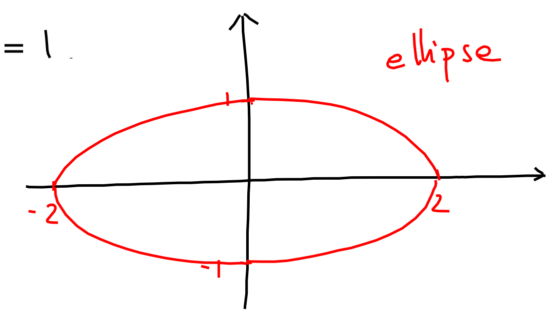
cercle de rayon 1.



2) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

$\overset{\shortparallel}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$

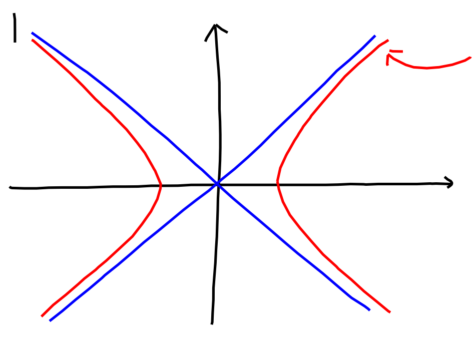
ellipse



3) $x^2-y^2=1$

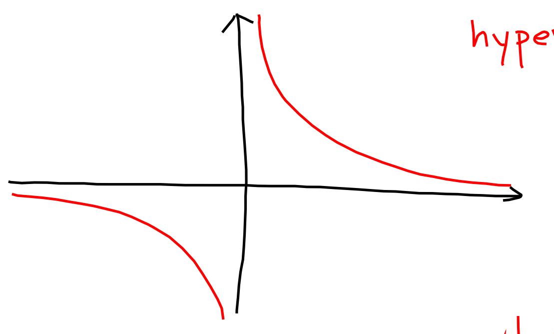
$x^2-y^2=0$
$\shortparallel$
$(x-y)(x+y)$

$x^2-y^2=1$
hyperbole



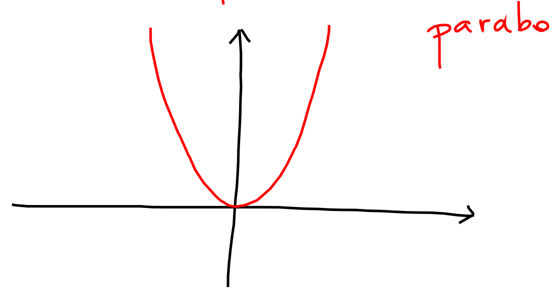
4) $xy=1$

hyperbole



5) $y=x^2$

parabole



Thm : Soit $P(x,y)$ un polynôme de degré 2.

Il existe un chgt de coordonnées

$$X = a_1x + a_2y + a_3$$
$$Y = b_1x + b_2y + b_3$$

t q P dans ces variables soit un des polynômes suivants :

$X^2+Y^2=1$ ellipse

$X^2-Y^2=1$ hyperbole

$X^2-Y=0$ parabole

ou

$X^2-1=0$ deux droites parallèles	$X^2-Y^2=0$ deux droites sécantes	$X^2=0$ deux fois la même droite
$X^2+Y^2=0$ point	$X^2+Y^2=-1$ vide	$X^2=-1$. vide

démo. Deux cas

· $a\neq 0$ (ou $c \neq 0$) : On peut supposer $a\neq 0$.

$$ax^2+bxy+cy^2 = a\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}y\right)}_{x'}^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)y^2$$

$$= ax'^2 + c'y'^2 \qquad y'=y, \quad c' = c-\frac{b^2}{4a}$$

$$= \operatorname{sign}(a)\underbrace{\left(\sqrt{|a|}\,x'\right)}_{x''}^2 + \underbrace{\operatorname{sign}(c')\underbrace{\left(\sqrt{|c'|}\,y'\right)}_{y''}^2}_{\text{si } c'\neq 0}$$

$$= \pm x''^2 + \varepsilon y''^2 \quad \varepsilon\in\{\pm1,0\}$$

On peut supposer : $a=1$, $b=0$, $c\in\{\pm1,0\}$.

$$x^2+cy^2+dx+ey+f$$
$$\shortparallel$$
$c\neq 0$ $$\underbrace{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}_{X^2} + c\underbrace{\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2}_{Y^2} + f - \frac{d^2}{4} - \frac{e^2}{4c^2}.$$

· $a=0$, $c=0$, $b\neq 0$:

$$bxy+dx+ey+f = bx'^2 - by'^2 + (d+e)x' + (d-e)y' + f$$

$x'+y'=x$
$x'-y'=y$

On se ramène au cas précédent. □

Discriminant : $ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{matrix}} & \begin{matrix}\frac{d}{2} \\ \frac{e}{2}\end{matrix} \\ \begin{matrix}\frac{d}{2} & \frac{e}{2}\end{matrix} & f \end{pmatrix}$$

On suppose A de rang 3.

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix} = ac - \frac{b^2}{4}.$$

$\Delta > 0 \longrightarrow$ conique est une ellipse (ou le vide).

$\Delta = 0 \longrightarrow$ ______ parabole

$\Delta < 0 \longrightarrow$ ______ hyperbole

Rmq : En appliquant l'algorithme de Gauss le signe du déterminant en question ne change pas.

On se ramène aux formes canoniques :

X^2+Y^2 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\Delta>0$

X^2-Y^2 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\Delta<0$

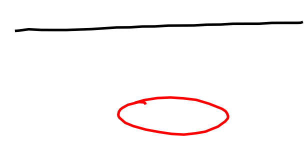
X^2-Y $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\Delta=0$.

Dessin en perspective :

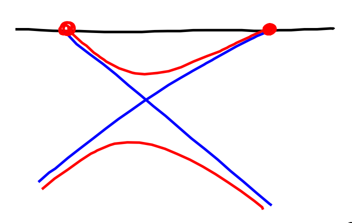
$x^2+y^2-z^2=0$ $\quad -4\Delta = b^2-4ac < 0 \longleftrightarrow x^2+1=0$ n'a pas de solution

$\longleftarrow$ horizon : $z=0$

l'ellipse ne touche pas l'horizon



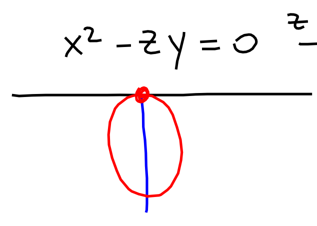
$x^2-y^2=z^2 \longrightarrow x^2-y^2=0 \xrightarrow{y=1} x^2-1$ a deux solutions



$z=0$ $\quad -4\Delta = b^2-4ac = 4 > 0$

l'hyperbole rencontre l'horizon en deux points.

$x^2-zy=0 \xrightarrow{z=0} x^2=0$ le discriminant de cette équation est nul



une seule solution mais double

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

$$\mathrm{Mat}(Q) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{3} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & & & \\ \frac{a_{13}}{2} & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ \frac{a_{1n}}{2} & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$