Rappel : isométrie de $\mathbb{R}^n$

$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linéaires tq

$\|\varphi(x)\| = \|x\|$

pour un produit scalaire fixé.

Dorénavant $\|\cdot\|$ sera la norme euclidienne associée au produit scalaire standard.

$A = \mathrm{Mat}(\varphi)$, A isométrie

$\iff {}^tAA = \mathrm{id}$

$\iff$ ses colonnes forment une base orthonormée

moins de calculs

${}^tAA = \left((c_i | c_j) \right)_{i,j}$ c_i = i-ème colonne de A

$B = {}^tAA$ est symétrique (il suffit de calculer la partie au-dessus de la diagonale).

Exemple : $n = 2$, $A \in M_2(\mathbb{R})$ isométrie

$\det A = 1$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

rotation d'angle θ

$\det A = -1$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

symétrie orthogonale d'axe $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

Propriétés des isométries.

Rappel : $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$P_A(X) = \det(A - X \cdot id)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre si $P_A(\lambda) = 0$

$\iff A - \lambda \cdot id$ n'est pas inversible

$\iff \ker(A - \lambda \cdot id) = V_\lambda \neq 0$

espace propre pour λ

vecteur propre pour λ : $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$.

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une isométrie (pour le produit scalaire standard).

1) si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre, $\lambda = \pm 1$.

2) $V_+ = \ker(A - id) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = v\}$ et

$V_- = \ker(A + id) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = -v\}$

sont orthogonaux.

Rmq : Il se peut qu'une isométrie n'a pas de valeurs propres réelles, e.g.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$P_A(X) = X^2 - 2\cos\theta \cdot X + 1$$

$$\frac{\Delta}{4} = (\cos\theta)^2 - 1 = -(\sin\theta)^2 \leq 0$$

avec égalité $\iff \theta \equiv 0 \mod \pi\mathbb{Z}$

valeurs propres : $\cos\theta \pm \underbrace{\sqrt{-(\sin\theta)^2}}_{i \cdot \sin\theta} = \cos\theta \pm i \cdot \sin\theta = e^{i\theta}$.

$i^2 = -1$.

Les valeurs propres sont réelles $\iff \theta \equiv 0 \mod \pi\mathbb{Z}$

$\iff A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

démo de la Prop. 1) soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre.

l'espace propre $V_\lambda = \ker(A - \lambda \cdot id) \neq 0$.

Il y a donc $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$. On a :

$$\|Av\| \overset{A \text{ isométrie}}{=} \|v\|$$

$v \in V_\lambda$: $\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

$\implies |\lambda| = 1 \implies \lambda = \pm 1$.

$v \neq 0$, $\|v\| \neq 0$

2) $v \in V_+$, $w \in V_-$

$$(Av \mid Aw) \overset{A \text{ isométrie}}{=} (v \mid w)$$

$Av = v$, $Aw = -w$: $(Av \mid Aw) = (v \mid -w) = -(v \mid w)$

$\implies (v \mid w) = 0$.

Autrement dit, V_+ et V_- sont orthogonaux. $\square$

Lemme : Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ isométrie, $\det(A) = \pm 1$.

démo. ${}^tAA = id \implies \det({}^tAA) = \det(id) = 1$

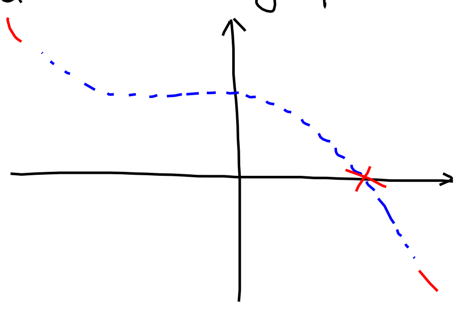
$\det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2$

$\implies \det(A) = \pm 1$. $\square$

Classification des isométries de $\mathbb{R}^3$

Lemme : $A \in M_3(\mathbb{R})$ isométrie, i.e. ${}^tAA = id$.
Alors $\det(A)$ est une valeur propre de A.

démo On considère le polynôme caractéristique de A, $P_A(X) = -X^3 + Tr(A)X^2 - \sigma_2 X + \det A$.
En particulier $P_A(X)$ est un polynôme de degré 3, le coefficient dominant est négatif.
On dessine le graphe de P_A :



$$\lim_{x \to -\infty} P_A(x) \overset{\text{||}}{=} \lim_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$$

Par continuité, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tq $P_A(\lambda_1) = 0$.

Deux possibilités :
$P_A(X) = (X - \lambda_1)\, q(X)$ ← $\deg q = 2$.

discriminant de q :
- $\geq 0 \longrightarrow$ deux racines réelles λ_2, λ_3 (A)
- $< 0 \longrightarrow$ deux racines complexes conjuguées $z, \bar{z}$. (B)

(B) $\det A = \lambda_1 \underbrace{z \cdot \bar{z}}_{|z|^2 > 0}$

Puisque A est une isométrie, $\det A = \pm 1$ et aussi $\lambda_1 = \pm 1$ car c'est une valeur propre d'une isométrie.
signe de $\det A = \text{signe}(\lambda_1 |z|^2) = \text{signe}(\lambda_1)$
$\Longrightarrow \boxed{\det A = \lambda_1.}$

(A) On suppose que P_A a trois racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Puisque A est une isométrie
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \pm 1$.

$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

- Supposons $\det A = 1$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.
  $1 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$ ↯
  $\Rightarrow$ il existe $\lambda_i = \det A$.
- Supposons $\det A = -1$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$
  $-1 = 1 \times 1 \times 1 = 1$ ↯
  $\Rightarrow$ il existe $\lambda_i = \det A$. □

On classifie les isométries avec $\det A = 1$.

$\det A = 1 \underset{\text{Lemme}}{\Longrightarrow}$ 1 valeur propre.

$\dim V_1 = 1$

$\dim V_1 = 2$ Impossible! Parce que dans ce cas $P_A(X) = -(X-1)^2(X-\lambda)$ avec $\lambda = \pm 1$.

$\dim V_1 = 3$

· $\lambda = -1 \longrightarrow$ impossible parce que $1 = \det A = 1 \times 1 \times (-1) = -1$ ↯

· $\lambda = 1 \longrightarrow \dim V_1 = 3 \neq 2$ ↯

[On verra plus tard qu'une isométrie est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, $\underbrace{\text{mult.alg}(1)}_{\substack{\text{plus grand entier } m \\ \text{tq } (x-1)^m \text{ divise } P_A(x)}} = \underbrace{\text{mult.géom}(1)}_{\substack{\dim \ker(A - id) \\ \dim V_1}}$]

$$\dim V_1 = 3 \Longrightarrow V_1 = \mathbb{R}^3 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = v\}$$

$$\Longrightarrow Av = v \ \forall v \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow A = id.$$

L'unique cas intéressant à étudier est $\dim V_1 = 1$.

$$P = V_1^{\perp} \qquad \dim P = \underset{\dim \mathbb{R}^3}{3} - \underset{\dim V_1}{1} = 2.$$

* $v \in P$ alors $Av \in P$ parce que :

$$Av \in P = V_1^{\perp} \Longleftrightarrow (Av \mid w) = 0 \quad \forall w \in V_1$$

$$\overset{Aw = w}{\Longleftrightarrow} (Av \mid Aw) = 0 \quad \forall w \in V_1$$

$$(Av \mid Aw) = (v \mid w) = 0$$

$$\Longleftrightarrow v \in P = V_1^{\perp}.$$

* $\|Av\| = \|v\| \quad \forall v \in P$.

Soit u_1, u_2 une base orthonormée de P.

La matrice B de l'application linéaire

$$P \longrightarrow P \qquad v \longmapsto Av$$

isométrie de $\mathbb{R}^2$

dans la base u_1, u_2 est

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1.$$

Soit $u_3 \in V_1$ un vecteur de norme 1, de manière que u_1, u_2, u_3 soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

La matrice A' de l'application linéaire

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad x \longmapsto Ax$$

dans la base u_1, u_2, u_3 est

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\underset{2\times 2}{B}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$$

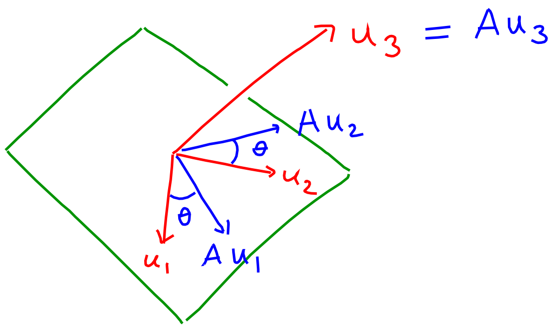
$1 = \det A = \det A' = \det B \cdot 1 = \varepsilon$

$\Longrightarrow \varepsilon = 1$.

Fin de l'histoire :

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On dit que A est une matrice de rotation d'angle θ et axe V_1.



Puisque la trace d'une matrice est invariante par conjugaison, on a

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A') = 1 + 2\cos\theta.$$

$$\Longrightarrow \cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}.$$

<u>On suppose $\det A = -1$.</u>

On commence par remarquer que

$$\dim V_{-1} = \begin{cases} 1 & \leftarrow \text{unique cas à étudier} \\ 3 & \longrightarrow A = -\mathrm{id}. \end{cases}$$

· $P = V_{-1}^{\perp}$: u_1, u_2 base orthonormée de P.

· $v \in P \Longrightarrow Av \in P$.

· Si $u_3 \in V_{-1}$ est un vecteur de norme 1, dans la base orthonormée u_1, u_2, u_3 l'application linéaire associée à A a matrice

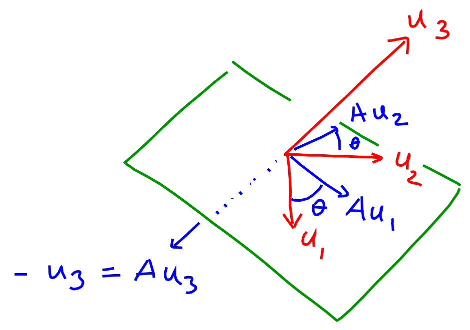
$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\quad B \quad} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} -1 = \det A &= \det A' \\ &= -\det B. \\ \Longrightarrow \det B &= 1. \end{aligned}$$

B isométrie

$$\Longrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On dit que A est une <u>rotation gauche</u> d'angle θ et axe V_{-1}.



$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$$
$$= -1 + 2\cos\theta.$$
$$\Longrightarrow \cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(A) + 1}{2}.$$

Formules : $A \in M_3(\mathbb{R})$ tq ${}^tAA = \mathrm{id}$.

$$\begin{aligned} \det A &= \pm 1 \\ \text{axe} &= \ker(A \mp \mathrm{id}) \\ \cos\theta &= \frac{\mathrm{Tr}(A) \mp \mathrm{id}}{2} \in [-1, 1] \end{aligned}$$