

## 2MA205: FEUILLE DE TD 1

### BORNES SUPÉRIEURES ET INFÉRIEURES

**Exercice 1.** (1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,

$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

(2) En déduire que

$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} \mid n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

**Exercice 2.** Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il existe une borne inférieure et une borne supérieure et, le cas échéant, les déterminer :

$$A = \left\{ \frac{2n}{2n-1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad B = \left\{ \frac{1}{1-2^{-n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\},$$
$$C = \left\{ \frac{x^3}{|x^3-1|}, x \in (0,1) \cup (1,+\infty) \right\}, \quad D = \left\{ \frac{x^n}{|x^n-1|}, x \in (0,1) \cup (1,+\infty), n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

**Exercice 3.** Soit

$$X = \left\{ \frac{2p}{2pq+3}, p, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

(1) Montrer que X est minoré et majoré.

(2) En déduire que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

**Exercice 4.** On considère

$$X = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Démontrer que X possède une borne inférieure et une borne supérieure et les déterminer.

**Exercice 5.** Montrer que les ensembles suivants possèdent dans  $\mathbb{R}$  une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer:

$$X = \left\{ \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{p}, p \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad Y = \left\{ \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{q}, p, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

**Exercice 6.** Soient  $A \subset \mathbb{R}$  et  $B = \{-x \mid x \in A\}$ .

(1) Montrer que B est minoré si et seulement que A est majoré.

(2) En supposant que A est majoré, démontrer que B admet une borne inférieure et que

$$\inf(B) = -\sup(A).$$

**Exercice 7.** Soit I un intervalle ouvert. Montrer qu'il n'existe pas deux sous-ensembles ouverts non vides A et B de  $\mathbb{R}$  tels que  $I = A \cup B$  et  $A \cap B = \emptyset$ . Soient  $a \in A$  et  $b \in B$  et on suppose  $a < b$  quitte à échanger A et B.

(1) Montrer que  $E = \{t \in [0,1] \mid a + t(b-a) \in A\}$  admet une borne supérieure T.

(2) Montrer que  $a + T(b-a) \notin A$ .

(3) En déduire que  $a + T(b-a) \in B$ .

(4) Montrer que ceci contredit le fait que T soit la borne supérieure de E.

## SUITES DENSES

**Exercice 8.** Soit  $H \subseteq \mathbb{R}$  un sous-groupe additif non réduit à  $\{0\}$ .

- (1) Justifier l'existence de  $a = \inf\{x \in H \mid x > 0\}$ .
- (2) On suppose  $a > 0$ . Montrer que  $a \in H$  puis que  $H = a\mathbb{Z}$ .
- (3) On suppose  $a = 0$ . Montrer que  $H$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- (4) Dédurre que la suite  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .

**Exercice 9.** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles qui tendent à  $+\infty$  pour  $n \rightarrow \infty$ . On suppose que  $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow \infty$ . On montre successivement :

- (1) Soient  $\varepsilon > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$ . Montrer que pour tout  $a \geq u_{n_0}$ , il existe  $n \geq n_0$  tel que  $|u_n - a| \leq \varepsilon$ .
- (2) En déduire que l'ensemble  $\{u_n - v_p \mid n, p \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- (3) Dédurre que la suite  $(\cos(\sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .
- (4) Déterminer l'adhérence de  $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
- (5) Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(u_n - \lfloor u_n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 10.** Soit  $(u_n)$  une suite strictement croissante non bornée de réels strictement positifs. On suppose que  $u_{n+1}/u_n$  tend à 1 lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Montrer que l'ensemble

$$\{u_m/u_n \mid m > n, m, n \in \mathbb{N}^*\}$$

est dense dans  $[1, +\infty[$ .

**Exercice 11.** Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall a, b \in A, \quad \frac{a+b}{2} \in A.$$

Montrer que  $A$  est dense dans l'intervalle  $]\inf A, \sup A[$ .

**Exercice 12.** Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}_+^*$  vérifiant

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad \sqrt{ab} \in A.$$

Montrer que  $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  est dense dans l'intervalle  $]\inf A, \sup A[$ .