2MA205: FEUILLE DE TD 2

Irrationalité de e

Exercice 1. Des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si u est croissante, v décroissante, et $v - u$ converge vers 0. Montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que u et v convergent vers la même limite.

Exercice 2. On se propose de montrer que $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ est irrationnel par une méthode due à Nicolas Dominique Marie Janot de Stainville. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$r_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, dx.$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + r_{n+1}, \qquad e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n \qquad \text{et} \qquad 0 \leq r_n \leq \frac{e}{n!}.$$

(2) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont adjacentes de limite e:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

(3) En raisonnant par l'absurde conclure que e irrationnel.

Autour du théorème de Cesaro

Exercice 3. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

(1) On suppose que u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite

$$v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}$$

converge vers une limite qu'on déterminera.

(2) On suppose que $(u_n - u_{n-1})/n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(u_n/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite qu'on déterminera.

Exercice 4. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Étudier la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Exercice 5. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

On suppose que la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer les faits suivants:

(1) La suite u ne converge pas nécessairement.

(2) Si u est monotone, alors u converge vers ℓ.

(3) Si $u_{n+1} - u_n = o(1/n)$ pour $n \to \infty$, alors u converge vers ℓ.