

2MA205: FEUILLE DE TD 3

Exercice 1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $e: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ l'application définie par $e(n) = \exp(2\pi in\theta)$. Si θ est rationnel, montrer que l'image de e est finie. Sinon, montrer que l'image de e est dense dans le cercle unité $\{z \in \mathbb{C}^\times : |z| = 1\}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$u_{n+1} = 2u_n + 3^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Trouver une formule explicite pour u_n . (Indication: Si on a deux telles suites, que peut-on dire de leur différence?)

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$u_{n+1} \equiv 2u_n \pmod{1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Discuter le comportement de la suite en fonction de u_0 .

Exercice 4. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que

$$(*) \quad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- (1) On suppose $c = 0$. Donner une formule explicite pour u_n .
- (2) Dorénavant on suppose $c \neq 0$. Montrer que la suite constante de valeur α satisfait (*) si et seulement si α est une racine de $P(z) := cz^2 + (d - a)z + b$.
- (3) On suppose que $P(z)$ ait deux racines distinctes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite

$$v_n := \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha} \quad \text{est géométrique de raison} \quad q := \frac{c\alpha + d}{c\beta + d}.$$

Discuter la convergence de (u_n) en fonction de q .

- (4) On suppose que $P(z)$ ait une racine double $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite

$$v_n := \frac{1}{u_n - \alpha} \quad \text{est arithmétique de raison} \quad k := \frac{2c}{a + d}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.