2MA205: FEUILLE DE TD 4

On fixe $c \in \mathbb{R}$ et on considère $f(x) = x^2 + c$, $f_n := f \circ \cdots \circ f$ la n-ième itérée de f et
$$\mathrm{K} = \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

Exercice 1. Pour $c = 0$, étudier la suite $(f_n(x))$ en fonction de x et en déduire K.

Exercice 2. Montrer les faits suivants:

(1) Si $c > \frac{1}{4}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f_n(x) \to +\infty$ et donc $\mathrm{K} = \varnothing$.
(2) Pour $c \le \frac{1}{4}$, l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions $\alpha \le \beta$.
(3) Pour $c \le \frac{1}{4}$ on a $\mathrm{K} \subset [-\beta, \beta]$. En déduire que
$$\mathrm{K} = \bigcap_{n\ge 0} f_n^{-1}([-\beta, \beta])$$
et que K est un ensemble compact.
(4) Pour $-2 \le c \le \frac{1}{4}$ l'intervalle $[-\beta, \beta]$ est stable par f. En déduire que $\mathrm{K} = [-\beta, \beta]$.

Exercice 3. On suppose $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$. Montrer les faits suivants:

(1) Le point α est attractif, c'est-à-dire que $|f'(\alpha)| < 1$. En déduire qu'il existe un voisinage V de α tel que si $x \in \mathrm{V}$, alors $f_n(x) \to \alpha$.
(2) L'ensemble B des points convergeant vers α est ouvert.
(3) Soit $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{B}$ la composante connexe de α. Alors $f(\mathrm{B}_0) = \mathrm{B}_0$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathrm{B}_0) = \mathbb{R} \setminus \mathrm{B}_0$.
(4) Le bord de B_0 est constitué de points tels que $f(x) = x$, $f_2(x) = f(x)$ ou $f_2(x) = x$.
(5) Il n'existe pas de point x tel que $f_2(x) = x$ et $f(x) \ne x$.
(6) Déterminer B_0.

Que se passe-t-il pour $c = \frac{1}{4}$?

Exercice 4. On suppose $c = -2$ et donc $\beta = 2$. Soit $\mathrm{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et $\pi \colon \mathrm{S} \to [-2, 2]$ donnée par $\pi(z) = 2\mathrm{Re}(z)$. Montrer les faits suivants:

(1) $f \circ \pi = \pi \circ \mu$ où $\mu(z) = z^2$.
(2) Il existe $\delta > 0$ tel que si $x \ne x'$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|f^n(x) - f^n(x')| \ge \delta$.
(3) Les points périodiques de f sont denses dans $[-2, 2]$.
(4) Il existe z tel que la suite $(\mu^n(z))$ est dense dans le cercle. En déduire que f a la même propriété.

Exercice 5. On considère le cas $c < -2$. Posons $\mathrm{I} = [-\beta, \beta]$. Montrer les faits suivants:

(1) $f^{-1}(\mathrm{I}) \cap \mathrm{I} = \mathrm{I}_0 \cup \mathrm{I}_1$, où I_j sont deux intervalles symétriques par rapport à l'origine.
(2) Pour $j = 0, 1$, $f \colon \mathrm{I}_j \to \mathrm{I}$ est un homéomorphisme.
(3) Pour $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$, on considère $\mathrm{I}_{\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n} := g_{\varepsilon_n}^{-1} \cdots g_{\varepsilon_0}^{-1}(\mathrm{I})$ où $g_{\varepsilon_i} = x^2 + \varepsilon_i$. Alors
$$\mathrm{K} = \bigcap_{n\ge 0} \bigcup_{\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n \in \{0,1\}} \mathrm{I}_{\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n}.$$
(4) On suppose $c < -\frac{9}{4}$. Alors il existe $\alpha > 1$ tel que $|f'(x)| \ge \alpha$ sur chacun des I_j.
(5) Pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$, l'intersection des $\mathrm{J}_{\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est un singleton.