

2MA205: FEUILLE DE TD 5

Exercice 1. Calculer la cardinalité des ensembles suivants:

- (1) Les entiers pairs.
- (2) Les entiers qui ne sont pas divisibles par 3.
- (3) Les nombres premiers.
- (4) Les nombres réels dont l'écriture décimale n'a que des 0 et des 1.
- (5) Les nombres réels dont l'écriture décimale n'a que des 0, des 1 et des 9.
- (6) Un intervalle ouvert dans \mathbb{R} .
- (7) Un intervalle fermé dans \mathbb{R} .
- (8) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- (9) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.
- (10) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- (11) Un espace vectoriel réel de dimension finie.
- (12) Les suites de rationnels.
- (13) Les suites de rationnels qui sont de Cauchy.
- (14) Les suites de rationnels qui tendent à 0.
- (15) Les suites de réels.
- (16) Les suites de réels qui sont de Cauchy.
- (17) Les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (18) Les fonctions continues $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (19) Les fonctions infiniment différentiables $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (20) Les parties finies dans \mathbb{N} .
- (21) Les parties de complémentaire fini dans \mathbb{N} .
- (22) Les parties infinies dans \mathbb{N} .
- (23) Les parties infinies dans \mathbb{N} de complémentaire infini.

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel sur un corps K .

- (1) En utilisant le lemme de Zorn, montrer que V admet une base.
- (2) Montrer que toute base de V a la même cardinalité, qu'on appelle la dimension de V et on note $\dim V$.
- (3) On suppose dorénavant que $\dim V = |\mathbb{N}|$. Montrer que V est isomorphe à $K[x]$.
- (4) Montrer que le dual de V est isomorphe à l'espace de toute le suite à valeur dans K .
- (5) Calculer la cardinalité de V et V^* .