

2MA205: FEUILLE DE TD 6

1. L'AXIOME DU CHOIX ET SES DOPPELGÄNGER

Le but est de montrer l'équivalence des énoncés suivants:

- (AC) Pour tout ensemble $X \neq \emptyset$ il existe une application $f: \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ telle que $f(Y) \in Y$ pour tout $Y \subseteq X$.
- (HM) Tout ensemble partiellement ordonné admet une chaîne maximale.
- (LZ) Si (X, \leq) est un ensemble partiellement ordonné tel que toute chaîne a une borne supérieure, alors il existe un élément maximal dans X .
- (BO) Tout ensemble non vide peut être bien ordonné.

Exercice 1. Montrer que $(BO) \Rightarrow (AC)$.

Exercice 2. Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné.

- (1) Soit $M \subseteq X$ une chaîne maximale et $m \in X$ une borne supérieure. Montrer que $m \in M$ et que m est un élément maximal.
- (2) Conclure que $(HM) \Rightarrow (LZ)$.

Exercice 3. Soit X un ensemble. On considère l'ensemble

$$W = \{(A, R_A) : A \subseteq X, R_A \subseteq A \times A \text{ bon ordre sur } A\}.$$

On dit $(A, R_A) \leq (B, R_B)$ si (A, R_A) est un *segment initial* de (B, R_B) , i.e.

$$A \subset B, \quad R_A = (A \times A) \cap R_B, \quad aR_B b \quad \text{pour tout } a \in A \text{ et } b \in B \setminus A.$$

Montrer les faits suivants:

- (1) W est non vide.
- (2) \leq est un ordre partiel sur W .
- (3) Toute chaîne $C \subset W$ admet une borne supérieure.
- (4) Un élément maximal de W est un bon ordre sur X .
- (5) $(LZ) \Rightarrow (BO)$.

Exercice 4. Soit $f: \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ une application. Le but est de montrer l'énoncé suivant:

Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ une partie contenant \emptyset et satisfaisant la propriété suivante: pour toute chaîne $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ on a $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \in \mathcal{F}$. Alors \mathcal{F} contient un élément M tel que $M \cup \{x\} \notin \mathcal{F}$ pour tout $x \in X \setminus M$.

Pour ce faire, pour $A \in \mathcal{F}$ on pose $A^* = \{x \in X \setminus A : A \cup \{x\} \in \mathcal{F}\}$ et

$$F(A) = \begin{cases} A \cup \{f(A^*)\} & \text{si } A^* \neq \emptyset \\ A & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit que $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$ est une *tour* si $\emptyset \in \mathcal{T}$, $A \in \mathcal{F} \Rightarrow F(A) \in \mathcal{T}$ et $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \in \mathcal{T}$ pour toute chaîne $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$. Montrer les faits suivants:

Pour les solutions voir <https://www.math.uwaterloo.ca/~nspronk/math351/AofC.pdf> et <https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/maths/teaching/15Aut/M3P11/algclosure.pdf>.

- (1) \mathcal{F} est une tour.
- (2) L'intersection d'une famille de tours est une tour.
- (3) Soit \mathcal{T}_0 l'intersection de toutes les tours et $Y \in \mathcal{T}_0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{T}_0$ on a $A \subseteq Y$ ou $Y \subseteq A$. Alors

$$\{A \in \mathcal{T}_0 : A \subsetneq Y \text{ ou } F(Y) \subseteq A\} \cup \{Y\}$$

est une tour et coïncide avec \mathcal{T}_0 .

- (4) La collection \mathcal{Y} de tels ensembles Y est une tour, et donc $\mathcal{Y} = \mathcal{T}_0$.
- (5) \mathcal{T}_0 est bien ordonné.
- (6) $M = \bigcup_{A \in \mathcal{T}_0} A$ convient.

Exercice 5. Montrer que (AC) \Rightarrow (HM).

2. APPLICATIONS

Dans cette section on assume le lemme de Zorn (LZ).

Exercice 6. Montrer que tout espace vectoriel sur un corps admet une base.

Exercice 7. Montrer que tout anneau commutatif admet un idéal maximal.

Exercice 8. Soit K un corps et $\mathcal{F} \subset K[x]$ l'ensemble de tous les polynômes irréductibles. On considère l'anneau

$$A = K[x_f : f \in \mathcal{F}]$$

des polynômes dans les variables x_f pour $f \in \mathcal{F}$. Montrer les faits suivants:

- (1) L'idéal $I \subset A$ engendré par $f(x_f)$ pour $f \in \mathcal{F}$ est différent de A .
- (2) Il existe un idéal maximal $M \subset A$ contenant I .
- (3) Le quotient $\bar{K} = A/M$ est un corps et l'application $K \rightarrow \bar{K}$ est injective.
- (4) Tout élément $x \in \bar{K}$ est le zéro d'un polynôme à coefficients dans K .
- (5) Tout polynôme non constant à coefficients dans \bar{K} admet une racine dans \bar{K} .