2MA205: FEUILLE DE TD 7

1. Nombres constructibles

On identifie le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes au plan réel $\mathbb{R}^2$. Si $a, b \in \mathbb{C}$ sont des nombres complexes, on désigne par (ab) la droite passant par a et b. Si $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on désigne par $\mathrm{C}(a, r)$ le cercle de centre a et rayon r. Soit S une partie de $\mathbb{C}$ contenant 0 et 1. On dit qu'un nombre complexe z est *élémentairement constructible* (sous-entendu : à la règle et au compas) à partir de S s'il existe des points a, b, c, a', b', c' dans S tels qu'une des assertions suivantes soit vérifiée:

- les droites (ab) et $(a'b')$ ne sont pas parallèles et se croisent en z;
- le cercle $\mathrm{C}(a, |b - c|)$ et la droite $(a'b')$ se rencontrent en z;
- les cercles $\mathrm{C}(a, |b - c|)$ et $\mathrm{C}(a', |b' - c'|)$ se rencontrent en z.

On dit qu'un nombre complexe z est *constructible* (sous-entendu : à la règle et au compas) à partir de S s'il existe des points $z_1, \ldots, z_n = z$ tels que, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, z_i soit élémentairement constructible à partir de $\mathrm{S} \cup \{z_1, \ldots, z_{i-1}\}$. On désigne par

$$\mathscr{C}_\mathrm{S} \subset \mathbb{C}$$

l'ensemble des nombres constructibles à partir de S.

Exercice 1. Montrer les faits suivants:

(1) Si $z, z' \in \mathscr{C}_\mathrm{S}$, alors $z + z', z - z' \in \mathscr{C}_\mathrm{S}$.
(2) $z \in \mathscr{C}_\mathrm{S}$ si et seulement si $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathscr{C}_\mathrm{S}$.
(3) Si $z, z' \in \mathscr{C}_\mathrm{S}$ et $z' \neq 0$, alors $zz', z/z' \in \mathscr{C}_\mathrm{S}$.
(4) $\mathscr{C}_\mathrm{S}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
(5) La valeur absolue d'un nombre constructible est constructible.
(6) Soit $r > 0$ et C le cercle de centre $i(r-1)/2$ et rayon $r + 1$. Alors $\mathrm{C} \cap \mathbb{R} = \{\pm\sqrt{r}\}$.
(7) Donner une formule pour les racines carrées de $z \in \mathbb{C}$ en termes $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$.
(8) Si $z \in \mathscr{C}_\mathrm{S}$, il en est de même pour ses racines carrées.

Exercice 2. Soit $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}$ le sous-corps engendré par S et la conjugaison complexe. Montrer les faits suivants:

(1) Si $z \in \mathbb{C}$ est élémentairement constructible à partir de S, il satisfait une équation polynomiale de degré $\leqslant 2$ dont les coefficients appartiennent à K.
(2) Si $f(z) \in \mathrm{K}[z]$ est un polynôme de degré $\leqslant 2$, alors ses racines sont constructibles.

Dorénavant on prend $\mathrm{S} = \{0, 1\}$.

Exercice 3. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est constructible si et seulement s'il existe des sous-corps $\mathrm{K}_0 = \mathbb{Q}, \mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_n \subset \mathbb{C}$ stables par conjugaison complexe tels que $z \in \mathrm{K}_n$ et, pour tout $i = 1, \ldots, n$, K_i est une extension quadratique K_{i-1}.

Exercice 4. Montrer qu'il n'est pas possible de diviser un angle en trois parties égales à l'aide d'une règle et d'un compas.

Exercice 5. Montrer qu'il n'est pas possible de construire à la règle et au compas un cube de volume double de celui d'un cube donné.

Pour les solutions voir: `https://www.math.utah.edu/~bertram/courses/4030/Constructible.pdf`.

2. Cyclotomie et polygones réguliers

Soit $n \geqslant 1$. Une racine primitive n-ième de l'unité est un nombre complexe $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$ et $z^i \neq 1$ pour tout $i < n$. Il est forcément de la forme $\zeta = e^{2\pi i k/n}$ avec k premier à n. Let n-ième *polynôme cyclotomique* est

$$\Phi_n(z) = \prod_{\zeta} (z - \zeta)$$

où le produit parcourt les racines primitives n-ièmes de l'unité.

Exercice 6. Montrer qu'on a

$$\prod_{d|n} \Phi_d(z) = z^n - 1$$

et en déduire que $\Phi_n(z)$ est un polynôme unitaire à coefficients entiers de degré $\varphi(n)$.

Exercice 7. Soit p un premier. Montrer que $\Phi_p(z) \equiv (z-1)^p \pmod{p}$ et $\Phi_p(1) \not\equiv 0 \pmod{p^2}$ et en déduire que $\Phi_p(z)$ est irréductible.

Exercice 8. Soit $f(z)$ un diviseur irréductible de $\Phi_n(z)$ dans $\mathbb{Z}[z]$ et ζ une racine de f. Le but est de montrer que ζ^p est une racine de f pour tout premier $p \nmid n$. Pour ce faire on écrit $\Phi_n(z) = f(z)g(z)$ et on suppose par l'absurde que $f(\zeta^p) \neq 0$. Montrer les faits suivants:

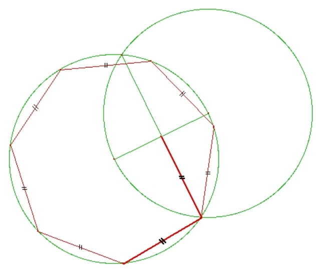
(1) $\Phi_n(z)$ n'a que des racines simples modulo p.
(2) $f(z)$ divise $g(z^p)$.
(3) $g(z^p) \equiv g(z)^p \pmod{p}$.
(4) Le polynôme $f(z), g(z) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[z]$ ne sont pas premier entre eux.
(5) Conclure.

Exercice 9. Montrer que $\Phi_n(z)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[z]$.

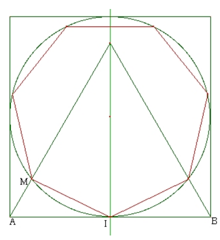
Exercice 10. Montrer que le n-gone régulier est constructible à la règle et au compas si et seulement si $e^{2\pi i/n}$ est constructible. Déduire que si le n-gone régulier est constructible alors $\varphi(n) = 2^k$ pour un certain k.

Exercice 11. On considère les deux constructions suivantes d'un heptagone:

(1) Tracer un cercle, placer un point m sur ce cercle et tracer un deuxiḿe cercle de même rayon et de centre m. Reporter sept fois sur un cercle la demi-corde commune.



(2) Tracer un carré et un triangle équilatéral ayant un côté commun. Le cercle inscrit dans le carré coupe un côté du triangle équilatéral en M. I étant le milieu de [AB], la longueur MI est celle du côté de l'heptagone.



Expliquer pourquoi les heptagones obtenus ne sont pas réguliers et déterminer le degré d'erreur.