2MA205: FEUILLE DE TD 8

1. Lemmes préparatoires

Exercice 1. Soit $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme de degré d. On pose

$$\Phi_f(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(d)}(x).$$

Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a

$$\int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} f(\alpha x)\, \mathrm{d}x = \Phi_f(0) - e^{-\alpha}\Phi_f(\alpha).$$

Exercice 2. Soit $u(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme à coefficients entiers et $p \geqslant 1$. On pose:

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} u(x)^p.$$

Montrer les faits suivants:

(1) Si $g \in \mathbb{Z}[x]$ est un polynôme à coefficients entiers alors $g^{(k)}(x)$ est un polynôme à coefficients entiers multiples de $k!$.
(2) Soit $g(x) = f(x)^p$. Pour $k \geqslant 1$, le polynôme $g^{(k)}(x)$ est à coefficients entiers multiples de $p(i-1)!$.
(3) Pour tout $k \geqslant 0$ on a

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{k}{i} \frac{x^{p-1-i}}{(p-1-i)!} g^{(k-i)}(x).$$

(4) Si $k \geqslant p$ alors $f^{(k)}(x)$ est un polynôme à coefficients entiers divisibles par p.
(5) $f^{(p-1)}(0) = u(0)^p$.

2. Transcendence de e

Le but est de montrer que e est transcendent. On procède par l'absurde et on suppose que e est racine d'un polôme à coefficients entiers non nul

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d \qquad \text{avec } d \geqslant 1 \text{ et } a_d \neq 0.$$

Soit p un nombre premier. On pose

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(x-1)^p \cdots (x-d)^p.$$

Exercice 3. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$\Psi_f(t) = te^t \int_0^1 e^{-tx} f(tx)\, \mathrm{d}x.$$

Montrer les égalités suivantes:

(1) $$\sum_{i=0}^{d} a_i e^i \Phi_f(0) = 0.$$

(2) $$\Phi_f(t) + \Psi_f(t) = e^t \Phi_f(0).$$

(3) $$\sum_{i=0}^{d} a_i \Phi_f(i) = -\sum_{i=1}^{d} a_i \Psi_f(i).$$

Le but du reste de la feuille est de montrer que l'égalité (3) est absurde pour p assez grand, en prouvant que son membre de gauche est un entier non nul, alors que son membre de droite a valeur absolue < 1.

Exercice 4. Montrer les faits suivants:

(1) $f^{(k)}(i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $k = 0, \ldots, p-1$.
(2) $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, \ldots, p-2$.
(3) $\Phi_f(i)$ est un multiple p pour $i = 1, \ldots, n$.
(4) $\Phi_f(0) \equiv (-1)^{pd}(d!)^p \pmod p$.

Exercice 5. Montrer les inégalités suivantes:

$$|f(t)| \leqslant \frac{d^{p-1}}{(p-1)!} d!^p \qquad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant d \tag{4}$$

$$|\Psi_f(i)| \leqslant \frac{d^p e^d d!^p}{(d-1)!} \tag{5}$$

Conclure que l'inégalité (3) est absurde pour p suffisamment grand.