2MA205: FEUILLE DE TD 9

Exercice 1. Le but de cet exercice est de montrer, que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a
$$\frac{(30n)!n!}{(15n)!(10n)!(6n)!} \in \mathbb{Z}.$$
Montrer les faits suivants:

(1) Pour $x \in \mathbb{Z}$ non nul et p premier, montrer que
$$v_p(x!) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{x}{p^i}\right].$$
(2) La fonction $f(x) = [30x] + [x] - [15x] - [10x] - [6x]$ est périodique de période 1.

(3) La fonction f est constante sur les intervalles $[\frac{n}{30}, \frac{n+1}{30}[$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

(4) Pour $n = 0, \ldots, 29$ on a $f(\frac{n}{30}) = n - [\frac{n}{2}] - [\frac{n}{3}] - [\frac{n}{5}]$.

(5) Pour $p = 2, 3, 5$ soit $n_p \in \{0, \ldots, p-1\}$ la classe modulo p de n. Alors
$$f(\tfrac{n}{30}) = \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3} + \frac{n_5}{5} - \frac{n}{30} = \frac{15n_2 + 10n_3 + 6n_5 - n}{30}.$$
(6) Déduire que f est positive et conclure l'exercice.

Exercice 2. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

(1) Pour un entier $n \geqslant 1$ montrer qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que
$$\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+1}} dx = \frac{a_n + b_n \log 2}{\text{ppcm}(1, 2, \ldots, n)}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{Z}.$$
Indication: Intégrer par parties et ne pas toucher $\frac{d}{dx}(x^n(1-x)^n)$.

(2) Montrer qu'on a
$$\text{ppcm}(1, \ldots, n) = \prod_{p \leqslant n} p^{[\log n / \log p]}.$$
(3) En supposant $\pi(x) \sim x \log(x)$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a
$$\text{ppcm}(1, \ldots, n) \leqslant e^{(1+\varepsilon)n}.$$
(4) Déduire que $\log 2$ est irrationnel.

Exercice 3. Montrer les faits suivants:

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $[n!e] = \sum_{k=0}^{n} n!/k!$.

(2) Pour tout $\mathrm{P}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ et $n, m \in \mathbb{Z}$ distincts, $n - m$ divise $\mathrm{P}(n) - \mathrm{P}(m)$.

(3) Pour des entiers $n > m \geqslant 0$ on a
$$\frac{[n!e] - [m!e]}{n - m} \in \mathbb{N}.$$

Exercice 4. Montrer les faits suivants:

(1) $\binom{2k+1}{k}$ est divisible par tout premier p tel que $k+2 \leqslant p \leqslant 2k+1$.

(2) $4^k \geqslant \binom{2k+1}{k}$. Indication: On écrira $2 \times 4^k = 2^{2k+1}$.

(3) Déduire l'inégalité suivante:

$$\prod_{\substack{k+2 \leqslant p \leqslant 2k+1 \\ \text{premier}}} p \leqslant \binom{2k+1}{k}.$$

(4) Par récurrence sur n, montrer que

$$\prod_{\substack{p \leqslant n \\ \text{premier}}} p \leqslant 4^n.$$

Exercice 5. Soit $n \geqslant 1$ un entier et p un premier. Montrer les faits suivants:

(1) On a

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2n}{p^i}\right] - 2\left[\frac{n}{p^i}\right] \leqslant \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right].$$

(2) Si $p > \sqrt{2n}$, alors p^2 ne divise pas $\binom{2n}{n}$.

(3) Si $n \geqslant p > \frac{2}{3}n$, alors p ne divise pas $\binom{2n}{n}$.

(4) En déduire qu'on a

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &\leqslant \prod_{p \leqslant \sqrt{2n}} p^{[\log(2n)/\log(p)]} \prod_{\sqrt{2n} \leqslant p \leqslant 2/3n} p \prod_{n \leqslant p \leqslant 2n} p \\ &\leqslant (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n} (2n)^{\mathrm{P}(n)}\end{aligned}$$

où $\mathrm{P}(n)$ est le nombre de premiers dans $[n, 2n]$.

(5) $\binom{2n}{n} \geqslant 4^n/2n$.

(6) Conclure qu'on a

$$\mathrm{P}(n) \geqslant \frac{2n}{3\log_2(2n)} - \sqrt{2n} + 1$$

et donc $\mathrm{P}(n) \geqslant 1$ pour $n \geqslant 512$.