Algèbre I - TD1

Structures algébriques

1 Groupes, anneaux et corps

Exercice 1 : Soit $(G, *, e)$ un groupe tel que pour tout $x \in G$, on ait $x^2 = e$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 2 : Soit $f : G \to H$ un morphisme bijectif de groupes. Est-ce aussi un isomorphisme de groupes ? Que dire du cas d'un morphisme bijectif de monoïdes $f : M \to N$? Et d'un morphisme bijectif d'anneaux $f : A \to B$?

Exercice 3 : Montrer que tout corps est un anneau intègre.

Exercice 4 : Soit A un anneau commutatif intègre et a un élément non nul de A. Montrer que l'application $m_a : A \to A$ donnée par $m_a : x \mapsto ax$ est injective. En déduire que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 5 : Traduire en termes de morphismes de structures connues (monoïdes, groupes, anneaux, corps) les propriétés suivantes :

a) Pour tous $M, M' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(MM') = \det(M)\det(M')$.

b) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $|zz'| = |z| \cdot |z'|$.

c) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ et $\sqrt{\cdot}$ est bijectif d'inverse $(\cdot)^2$.

d) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

e) Pour $R \in \mathbb{C}[X]$, l'application $f : P(X) \mapsto P(R)$ de $\mathbb{C}[X]$ dans lui-même vérifie $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$ et $f(PQ) = f(P)f(Q)$ et $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

f) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$ et la conjugaison complexe est bijective et est son propre inverse et est l'identité sur $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Exercice 6 : Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sont-ils isomorphes ? Même question pour les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$.

Exercice 7 : Montrer que les groupes multiplicatifs $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}^*$ ne sont pas isomorphes.

2 Relations d'équivalence et quotients

Exercice 8 : Soit $f : X \to Y$ une application. On considère sur X la relation R_f donnée par xR_fy si et seulement si $f(x) = f(y)$.

a) Montrer que R_f est une relation d'équivalence.

b) Montrer que si f est surjective, on peut identifier le quotient X/R_f avec Y par une bijection naturelle.

c) Qu'obtient-t'on si f n'est pas surjective ?

Exercice 9 : [L'espace projectif] Soit K un corps commutatif (par exemple à $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On considère sur $X_n(K) = K^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ la relation donnée par vRv' si et seulement si il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $v = \lambda \cdot v'$.

a) Montrer que R est une relation d'équivalence.

b) Déterminer la classe d'un vecteur donné.

c) Décrire l'ensemble quotient $\mathbb{P}^n(K) = X_n(K)/R$.

d) Montrer que l'application $K \to \mathbb{P}^1(K)$ donnée par $x \mapsto [(x, 1)]$ est injective de complémentaire un point, noté ∞. En déduire une bijection $K \cup \{\infty\} \to \mathbb{P}^1(K)$.

e) Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que la restriction à C de l'application de classe $\mathrm{cl}_R : X_1(\mathbb{R}) \to X_1(\mathbb{R})/R$ est surjective.

f) Quelle est la relation d'équivalence sur C associée à cette application $f = (\mathrm{cl}_R)_{|C} : C \to X_1(\mathbb{R})/R$?

g) Décrire l'ensemble quotient C/R_f et donner une identification naturelle $C/R_f \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 10 : On considère sur $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ la relation définie par $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ si et seulement si $x_1 y_2 = y_1 x_2$.

a) Montrer que R est une relation d'équivalence sur X.

b) Montrer que si (x, y) et (x', y') ne sont pas linéairement indépendants, ils sont équivalents au sens de la relation R.

c) Décrire la classe d'un vecteur (x, y) donné.

d) Décrire l'ensemble quotient X/R.

3 Sous-groupes

Exercice 11 : Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G.

a) Montrer que l'intersection de H et K est un sous-groupe de G.

b) Que dire de la réunion de H et K ?

Exercice 12 : Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Soient $H \subset G$ un sous-groupe et $H' \subset G'$ un sous-groupe.

a) L'image réciproque $f^{-1}(H')$ est-elle un sous-groupe de G ?

b) L'image directe $f(H)$ est-elle un sous-groupe de G' ?

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$ si et seulement si f est injectif.

Exercice 13 : Soit $P \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $f : P \to \mathbb{R}^*$ l'application qui envoie une telle matrice sur a et $i : \mathbb{R} \to P$ l'application qui envoie b sur la matrice $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que f est un morphisme de groupes surjectif vers le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \cdot, 1)$.

c) Montrer que i est un morphisme de groupes injectif partant du groupe additif $(\mathbb{R}, +, 0)$.

d) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(i)$.

Exercice 14 : Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un entier naturel n tel qu'on ait $H = n\mathbb{Z}$.

Exercice 15 : Déterminer tous les endomorphismes injectifs et les automorphismes du groupe $\mathbb{Z}$.

Exercice 16 : Montrer qu'un morphisme de corps commutatif $f : K \to L$ est forcément injectif. Qu'en est-il si K est un corps commutatif et L est seulement un anneau commutatif ?

4 Groupes et anneaux quotients

Exercice 17 : Les groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 18 : Soit $n > 1$ un entier naturel. On note $\mu_n(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}^*, z^n = 1\} = \{e^{\frac{2i\pi k}{n}}, k \in \mathbb{Z}\}$. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mu_n(\mathbb{C})$ l'application qui envoie k sur $e^{\frac{2i\pi k}{n}}$.

a) Montrer que l'ensemble $\mu_n(\mathbb{C})$ forme un groupe multiplicatif.

b) Montrer que f est un morphisme surjectif de groupes entre le groupe additif des entiers et le groupe multiplicatif $\mu_n(\mathbb{C})$.

c) Quel est le noyau de f ?

d) En déduire que le groupe $\mu_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 19 : On considère l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ donnée par $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$. On admet que cette application est surjective.

a) Montrer que exp est un morphisme de groupes.

b) Calculer son noyau.

c) En déduire un isomorphisme entre $\mathbb{C}^*$ et un groupe quotient.

Exercice 20 : Soit G un groupe.

a) Montrer que, si $\{H_i\}_{i\in I}$ est une famille non vide de sous-groupes de G, son intersection $\cap_{i\in I} H_i$ est aussi un sous-groupe.

b) Si $X \subset G$ est un sous-ensemble, on définit le sous-groupe engendré $\langle X\rangle$ comme l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant X. Décrire $\langle X\rangle$ explicitement.

c) Décrire explicitement tous les morphismes de groupes $f : \mathbb{Z} \to G$ et décrire leur image.

d) En déduire que pour tout $g \in G$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $\langle g\rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 21 : [Théorème de Lagrange] Soit G un groupe fini et H un sous-groupe.

a) Montrer que la relation sur G définie par

$$gR_Hg' \Leftrightarrow g^{-1}g' \in H$$

est une relation d'équivalence. On note $\mathrm{cl}_H : G \to G/H$ le quotient correspondant.

b) Montrer que les classes d'équivalence pour R_H sont les classes à gauche $gH = \{gh,\ h \in H\}$.

c) Montrer que pour tout $g \in G$, on a l'égalité de cardinaux $|H| = |gH|$.

d) On note $[G : H] = |G/H|$. Montrer que $|G| = [G : H] \cdot |H|$ et en déduire que $|H|$ divise $|G|$.

Exercice 22 : [Nombres complexes et matrices] On rappelle que l'application $a \mapsto aI$ fait de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une $\mathbb{R}$-algèbre.

a) Construire un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres

$$f : \mathbb{R}[X] \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

tel que $f(X)$ soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que l'image de f est l'algèbre C des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Calculer $f(X^2 + 1)$.

d) En déduire un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} C$.