Algèbre I - TD2

Division euclidienne

1 L'anneau quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice 1 :

a) Ecrire les tables de multiplication de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

b) Ces anneaux sont-ils intègres ?

c) Construire un morphisme naturel d'anneaux $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et montrer que c'est un isomorphisme.

Exercice 2 :

a) Déterminer le reste de la division de 247^{349} par 7.

b) Montrer que $2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13.

Exercice 3 : Déterminer l'inverse de 5 modulo 12, de 8 modulo 27 et de 14 modulo 25.

2 Structure euclidienne de $\mathbb{Z}$

Exercice 4 : Soit d le pgcd de deux entiers a et b. Montrer que si $d = au + bv$, les entiers u et v sont premiers entre eux.

Exercice 5 : Déterminer le pgcd de $a = 1234$ et $b = 832$ et deux entiers u et v tels que $d = au + bv$.

Exercice 6 : Soient a et b deux entiers non nuls et soit $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$. Montrer que si le couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $au_0 + bv_0 = d$, les autres couples (u, v) vérifiant $au + bv = d$ sont les couples définis pour chaque $k \in \mathbb{Z}^*$ par

$$(u_k, v_k) = (u_0 + kb_1, v_0 - ka_1)$$

où a_1 et b_1 sont définis par $a = da_1$ et $b = db_1$.

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes : $5x - 18y = 4$ et $6x + 15y = 28$.

Exercice 8 : Soient a et b deux entiers positifs. Exprimer le pgcd et le ppcm de a et b en fonction des décompositions respectives de a et b en facteurs premiers.

3 Structure euclidienne des polynômes

Exercice 9 : Effectuer la division euclidienne du polynôme $A(X)$ par le polynôme $B(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ pour les polynômes suivants :

a) $A(X) = X^2 - 2X^2 + 4X - 8$, $B(X) = X - 3$.

b) $A(X) = 2X^4 - 3X^3 + X^2 - 5$, $B(X) = X^2 - 1$.

Exercice 10 : Calculer le pgcd de $A(X) = X^3 + X - X^2 - 1$ et $B(X) = X^3 - 1$ et écrire l'identité de Bézout.