Algèbre I - TD2bis

Quotients des anneaux de polynômes

Exercice 1 : [Les racines carrées de 2] On souhaite étudier les anneaux quotients $A = \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$ et $B = \mathbb{R}[X]/(X^2 - 2)$. On note $\sqrt{2}$ la racine positive de $X^2 - 2$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}.$$

a) Donner un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel simple de représentants pour les classes de $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$.

b) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ (contient 0, 1, stable par addition et multiplication).

c) Montrer que si $(a, b) \in \mathbb{Q}^2 - \{(0, 0)\}$, alors $a^2 - 2b^2 \neq 0$.

d) En déduire que pour $a + b\sqrt{2} \neq 0$, on a

$$(a + b\sqrt{2})\frac{(a - b\sqrt{2})}{a^2 - 2b^2} = 1.$$

e) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un corps.

f) Construire un morphisme naturel de $\mathbb{Q}$-algèbres

$$A = \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

en utilisant que $\sqrt{2}$ est racine du polynôme $X^2 - 2$, et montrer que c'est un isomorphisme (quelle est la dimension des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels en jeu ?).

g) L'anneau A est-il un corps ?

h) Donner un $\mathbb{R}$-espace vectoriel simple de représentants pour les classes de $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 2)$.

i) Construire un isomorphisme naturel de $\mathbb{R}$-algèbres

$$B = \mathbb{R}[X]/(X^2 - 2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

en utilisant que $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont deux racines distinctes du polynôme $X^2 - 2$ dans $\mathbb{R}$.

j) L'anneau B est-il un corps ?

Exercice 2 : [Les racines carrées de 1] Soit K un corps. On souhaite étudier le quotient $A = K[X]/(X^2 - 1)$.

a) Donner un K-espace vectoriel simple de représentants pour les classes de $K[X]/(X^2 - 1)$.

b) On suppose que $2 \neq 0$ dans K.

   i) Montrer que $1 \neq -1$ dans K.

   ii) Construire un isomorphisme naturel de K-algèbres

$$A = K[X]/(X^2 - 1) \xrightarrow{\sim} K \times K$$

   en utilisant que 1 et -1 sont deux racines distinctes de $X^2 - 1$ dans K.

   iii) L'anneau A est-il un corps ?

c) On suppose que $2 = 0$ dans K.

   i) Montrer que $1 = -1$ dans K.

ii) Montrer que le morphisme
$$f : K[X] \to K[X]$$
donné par $f : P(X) \mapsto P(X+1)$ envoie (X^2-1) sur (X^2), que le morphisme $g : K[X] \to K[X]$ donné par $P(X) \mapsto P(X-1)$ envoie (X^2) sur (X^2-1).

iii) Montrer que f et g son inverse l'un de l'autre.

iv) Construire un isomorphisme naturel de K-algèbres
$$A = K[X]/(X^2-1) \xrightarrow{\sim} K[X]/(X^2).$$

v) L'anneau A est-il un corps ?