Algèbre I - TD3

Révisions d'algèbre linéaire

1 Equations et paramétrisations

Exercice 1 : On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ défini par

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

a) Quelle est la dimension de E ?
b) Construire une base de E, qu'on notera (e_1, e_2).

Exercice 2 : On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ donné par les équations cartésiennes suivantes.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Donner une équation paramétrique de ce sous-espace vectoriel et le décrire d'un point de vue géométrique.

Exercice 3 : On considère le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ dirigé par les vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(4, 5, 6)$. Donner une équation paramétrique de ce plan. À partir de ce paramétrage, obtenir une équation cartésienne de ce plan.

Exercice 4 : On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Notons la matrice $P = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Calculer, si possible, l'inverse de la matrice P. La famille (c_1, c_2, c_3) est-elle une base de $\mathbf{R}^3$? Si oui, calculer les coordonnées du vecteur v dans celle-ci.

2 Formes linéaires

Exercice 5 : On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbf{R}^3$.
b) Montrer qu'il existe trois formes linéaires l_1, l_2, l_3 sur $\mathbf{R}^3$ telles que pour tout i, j,

$$l_i(v_j) = 1 \text{ si } i = j \quad \text{et} \quad l_i(v_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

c) Calculer les coordonnées de l_1, l_2, l_3 dans la base de l'espace des formes linéaires sur $\mathbf{R}^3$ donnée par

$$e_1^*(x_1,x_2,x_3) = x_1, \quad e_2^*(x_1,x_2,x_3) = x_2, \quad e_3^*(x_1,x_2,x_3) = x_3.$$

La base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) est appelée base canonique du dual de $\mathbf{R}^3$ tandis que la base (l_1, l_2, l_3) est la base duale de (v_1, v_2, v_3).

Exercice 6 : Soit l_1, l_2, l_3 les formes linéaires sur $\mathbf{R}^3$ données par

$$l_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \qquad l_2(x_1,x_2,x_3) = x_2 - x_3, \qquad l_3(x_1,x_2,x_3) = 2x_3.$$

Trouver trois vecteurs (v_1, v_2, v_3) de $\mathbf{R}^3$ tels que

$$l_i(v_j) = 1 \text{ si } i = j \quad \text{et} \quad l_i(v_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Exercice 7 : On considère les deux formes linéaires suivantes définies sur $\mathbf{R}^3$:

$$l_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3, \qquad l_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3.$$

a) Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes.

b) Trouver une forme linéaire l_3 telle que la famille (l_1, l_2, l_3) soit une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbf{R}^3$.

Exercice 8 : On considère les trois formes linéaires suivantes définies sur $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{aligned} l_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1 + x_3 + x_4, \\ l_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_2 + x_4, \\ l_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

a) Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes.

b) Trouver une forme linéaire l_4 telle que la famille (l_1, l_2, l_3, l_4) soit une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbf{R}^4$.

Exercice 9 : Soient l_1 et l_2 deux formes linéaires non-nulles sur un espace vectoriel E.

a) Montrer que la famille (l_1, l_2) est liée si et seulement si $\ker(l_1) = \ker(l_2)$.

b) Montrer que si (l_1, l_2) est libre, alors $\dim(\ker(l_1) \bigcap \ker(l_2)) = \dim(E) - 2$ (*On pourra appliquer le théorème du rang à la restriction de* l_1 *à* $\ker(l_2)$).

Exercice 10 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $x \in E$. Montrer que $x \neq 0$ si et seulement si il existe $l \in E^*$ telle que $l(x) = 1$. Déterminer $\displaystyle\bigcap_{l \in E^*} \ker(l)$.

3 Calculs de déterminants

Exercice 11 : Calculer les déterminants des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3456 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 5 & 9 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 9 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 6 & 12 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 14 & 11 & 3 & 18 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&1&0\\1&0&1&0&0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\0&3&8&3&7&2\\0&0&2&8&-1&1\\0&0&0&1&8&5\\0&0&0&0&-1&9\\0&0&0&0&0&4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&0&0&0&0&5\\3&0&0&0&0&4\\4&0&0&0&0&3\\5&0&0&0&0&2\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 12 : Soit $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Calculer les déterminants des matrices suivantes.

1) $\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&3&1&3\\2&1&0&6\\1&1&1&7\end{pmatrix}$.