Algèbre I - TD4

Formes bilinéaires et formes quadratiques

1 Formes bilinéaires

Exercice 1 : Déterminer, parmi les applications suivantes, quelles sont les applications bilinéaires sur l'espace vectoriel E spécifié.

a) $E = \mathbf{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$;

b) $E = \mathbf{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2 + x_1y_2$;

c) $E = \mathbf{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_2 + x_1)y_2$;

d) $E = M_n(\mathbf{R})$, $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$ pour tout $A, B \in M_n(\mathbf{R})$.

e) $E = C^0([0, 1], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles,

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt \qquad \text{pour tout } f, g \in C^0([0, 1], \mathbf{R}).$$

f) $E = \mathbf{R}^2$,

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Soit $E = \mathbf{R}^2$. On note $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$.
Pour les formes bilinéaires suivantes, écrire leur matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, calculer leur rang et leur noyau et déterminer si elles sont symetriques.

a) $\varphi_1(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$;

b) $\varphi_2(x, y) = x_1y_2$;

c) $\varphi_3(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$;

d) $\varphi_4(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$;

e) $\varphi_5(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$;

f) $\varphi_6(x, y) = x_1y_1$;

g) $\varphi_7(x, y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$;

h) $\varphi_8(x, y) = x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + 6x_2y_2$.

Étant donnée une forme symétrique φ parmi les précédentes, déterminer l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \varphi(x, x) = 0\}$ et le comparer avec le noyau.

2 Formes quadratiques

Exercice 3 : Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $q\colon E \to \mathbf{R}$ une application. Montrer que q est une forme quadratique si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

a) pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, pour tout $x \in E$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$,

b) l'application $E \times E \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x - y)$ est bilinéaire symétrique.

Exercice 4 : Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $q\colon E \to \mathbf{R}$ une forme quadratique. Montrer l'identité du parallélogramme : pour tout $x, y \in E$, $q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y))$.

Exercice 5 : On considère les formes quadratiques suivantes sur $\mathbf{R}^3$:

$$Q_0(x,y,z) = x^2 + y^2 + xz, \quad Q_1(x,y,z) = 2x^2 + 6xy - 2xz + y^2 + 4yz - 3z^2, \quad Q_2(x,y,z) = xy + 3xz.$$

a) Pour chacune d'elles, écrire la matrice dans la base canonique de la forme bilinéaire symétrique associée et déterminer son rang et son noyau.

b) Décomposer Q_0, Q_1 et Q_2 en somme de carrés de formes linéaires indépendantes, et déterminer pour chacune la signature et le rang.

c) Donner une base orthogonale pour chacune de ces formes quadratiques.

Exercice 6 : Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes bilinéaires symétriques sur $\mathbf{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sont les suivantes :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'elles, écrire la forme quadratique associée $q_i(x_1, x_2, x_3)$ puis écrire q_i comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminer la signature et le rang de q_i.

Exercice 7 : On considère la forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$ définie par

$$Q(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 6yz.$$

a) Décomposer Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

b) Donner la signature de Q et son rang.

c) Donner une base de $\mathbf{R}^3$ orthogonale pour la forme quadratique Q.

Exercice 8 : On considère la forme quadratique sur $\mathbf{R}^4$ définie par

$$Q(x,y,z,t) = xy + xz - xt + yz + yt.$$

a) Décomposer Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

b) À quoi est égal le noyau de Q ?

c) Donner un exemple de vecteur $v \in \mathbf{R}^4$ non nul tel que $Q(v) = 0$. Comment s'appelle un tel vecteur ?

Exercice 9 : Soit E un espace vectoriel et l_1, l_2 deux formes linéaires non nulles et non proportionnelles définies sur E. On pose pour tout $x \in E$,

$$Q(x) = l_1(x)\, l_2(x).$$

a) Montrer que Q est une forme quadratique sur E en explicitant la forme bilinéaire associée.

b) En déduire le noyau et le rang de Q.

c) On se place sur $E = \mathbf{R}^3$ et on considère les formes linéaires l_1 et l_2 données par

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3, \qquad l_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2.$$

Donner les coordonnées de l_1 et l_2 dans la base canonique du dual de $\mathbf{R}^3$ sous forme de vecteurs lignes et calculer la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

3 Signature et déterminant

Exercice 10 : Soit E un espace de dimension finie n et Q une forme quadratique sur E. On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et on note A la matrice de Q dans cette base.

a) Le déterminant de A dépend-il de la base choisie ?

b) Montrer que son signe ne dépend pas de la base choisie.

Exercice 11 : On se donne trois réels a, b, $c \in \mathbf{R}$ et on pose $\Delta = ac - \frac{b^2}{4}$. Considérons la forme quadratique Q définie sur $\mathbf{R}^2$ dont la matrice associée est

$$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}.$$

a) Donner l'expression de Q en coordonnées.

b) Montrer que le signe de Δ ne dépend que de la signature de Q (*cf.* exercice précédent).

c) Montrer que la forme quadratique est non dégénérée si et seulement si Δ est non nul.

d) Calculer le signe de Δ pour chacune des valeurs possibles de la signature.

e) En déduire que Δ est strictement négatif si et seulement si la signature vaut $(1,1)$.

Exercice 12 : Soit a, $b \in \mathbf{R}$. On considère la forme quadratique Q sur $\mathbf{R}^3$ dont la matrice est donnée par

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2a \\ 0 & 2a & 3b \\ 2a & 3b & 2a^2 \end{pmatrix}.$$

Cette forme quadratique intervient dans l'étude des extensions cubiques en théorie de Galois.

a) Calculer le déterminant de cette matrice ; on le notera Δ.

b) Calculer $Q(1,0,0)$; Montrer que la signature de Q n'est pas égale à $(0,3)$.

c) Montrer que si $\Delta < 0$, la signature vaut $(2,1)$.

d) Calculer la matrice de Q en restriction à l'espace $\mathcal{E}$ engendré par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$.

e) En déduire que si $\Delta > 0$, Q est définie positive sur $\mathcal{E}$.

f) Montrer que si $\Delta > 0$, la signature de Q vaut $(3,0)$.