

## Algèbre I - TD5

### Espaces euclidiens et diagonalisation simultanée

#### 1 Espaces euclidiens

**Exercice 1 :** On considère les sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^3$  suivants :

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y = 0\},$$
$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y = 0\}.$$

- Calculer  $F_1 \cap F_2$ , en déduire la dimension de  $F_1 + F_2$ .
- A-t-on  $F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2$ ?  $F_1$  et  $F_2$  sont-ils en somme directe?
- $F_1$  et  $F_2$  sont-ils orthogonaux relativement au produit scalaire usuel?

**Exercice 2 :** On considère les sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^3$  suivants :

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 2x - 3y + z = 0\},$$
$$F_2 = \text{Vect}((1, 0, 1)).$$

- Montrer que  $F_1 \oplus F_2 = \mathbf{R}^3$ .
- Ces deux espaces sont-ils orthogonaux relativement au produit scalaire usuel sur  $\mathbf{R}^3$ ?

**Exercice 3 :** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $s: E \rightarrow E$  une application linéaire telle que  $s \circ s = \text{id}_E$ .

- Montrer que  $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ .
- En déduire que si  $E$  est de dimension finie, alors  $s$  est diagonalisable.
- On suppose  $E$  muni d'un produit scalaire pour lequel  $s$  est auto-adjoint. Alors,

$$\text{Ker}(s + \text{id}_E) = \text{Ker}(s - \text{id}_E)^\perp.$$

- Soient  $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues sur  $[-1, 1]$  à valeurs réelles et  $P, I$  les sous-ensembles de  $E$  respectivement formés par les fonctions paires et impaires. Montrer qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels et

$$I = P^\perp$$

par rapport au produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ .

- Soient  $E = M_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients réels et  $S, A$  les sous-ensembles de  $E$  formés respectivement par les matrices symétriques et anti-symétriques. Montrer qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels et

$$A = S^\perp$$

par rapport au produit scalaire  $\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^tMN)$ .

**Exercice 4 :** Soit  $Q$  une forme quadratique définie sur un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . On note  $(p, q)$  sa signature. On considère deux sous-espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  tels que la restriction de  $Q$  à  $E_1$  est définie positive, la restriction de  $Q$  à  $E_2$  est définie négative. Montrer que

$$E_1 \oplus E_2 \oplus \ker(q).$$

**Exercice 5 :** Soient  $E = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  l'espace vectoriel des applications indéfiniment différentiables de la droite réelle, à valeurs complexes et  $D: E \rightarrow E$  l'application associant à toute fonction  $f \in E$  sa dérivée  $f'$ .

- Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $D$ .
- Montrer que la famille  $\{x \mapsto e^{\alpha x}\}_{\alpha \in \mathbf{R}}$  d'éléments de  $E$  est libre.

**Exercice 6 :** Soit  $\mathbb{R}_1[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq 1$  muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Calculer la matrice de l'adjoint de l'opérateur  $D: f \mapsto f'$  dans la base  $1, X$  de  $\mathbb{R}_1[X]$ .

**Exercice 7 :** Soient  $E$  un espace euclidien de dimension finie et  $f: E \rightarrow E$  une application linéaire. Montrer les faits suivants :

- $\text{Im}(f)^\perp = \text{Ker}(f^*)$ .
- Si de plus  $f \circ f^* = f^* \circ f$ , on a  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^*)$  et  $\text{Im}(f)^\perp = \text{Ker}(f)$ .

## 2 Matrices symétriques et diagonalisation simultanée

**Exercice 8 :** Soit

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- Citer un théorème du cours assurant que  $A$  est diagonalisable.
- Déterminer les valeurs propres de  $A$  (pour calculer  $P_A(X)$ , on pourra faire des opérations sur les colonnes pour faire apparaître au moins un zéro), puis une base orthonormée  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres de  $A$ .
- Donner la signature de la forme quadratique  $Q(x, y, z) = -7x^2 + 8xy - 8xz + 5y^2 - 4yz + 5z^2$ .

**Exercice 9 :** Diagonaliser dans une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 10 :** On considère la forme quadratique définie sur  $\mathbf{R}^3$  par

$$Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 4yz.$$

- Donner la matrice de  $Q$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^3$ .

- b) Donner une base à la fois orthonormée pour le produit scalaire usuel et orthogonale pour  $Q$ .
- c) Donner la signature et le rang de  $Q$ .
- d) Calculer le noyau de  $Q$ . Est-il égal à son cône des vecteurs isotropes ?

**Exercice 11 :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ( $n \geq 2$ ) la matrice symétrique dont tous les coefficients sont 1, sauf les coefficients diagonaux qui sont nuls :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de  $A$  puis en déduire la signature et le rang de la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$  donnée par  $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i < j} 2x_i x_j$ .

**Exercice 12 :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée symétrique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a  ${}^t x A x \geq 0$ ;
- b) il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = {}^t B B$ .

**Exercice 13 :** Soient  $\phi$  une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $\mathbb{R}^n$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  sa matrice dans la base canonique. Montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire supérieure  $T \in M_n(\mathbb{R})$  à coefficients diagonaux strictement positifs telle que  $A = {}^t T T$ .

**Exercice 14 :** Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables sur  $\mathbf{C}$  et les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$