

ARITHMÉTIQUE DES COURBES ELLIPTIQUES

FEUILLE DE TD 2

Soit k un corps algébriquement clos.

Exercice 1. Soit F un corps de fonctions sur k d'une variable et X la courbe projective lisse associée. Montrer les faits suivants :

- (1) Pour tout $x \in X$, le corps résiduel en x est k .
- (2) Pour tout $f \in F \setminus k$, l'extension $k(f) \subset F$ est finie.

Exercice 2. Soit $\pi: Y \rightarrow X$ un morphisme non constant entre courbes projectives lisses sur k . Pour tout diviseur $D = \sum m_x x$ sur X on pose

$$\pi^*D := \sum_{\pi(y)=x} \text{ord}_y(\pi) m_x y$$

où $\text{ord}_y(\pi)$ est l'ordre de ramification de π en y . Pour tout diviseur $D = \sum m_y y$ sur Y on pose

$$\pi_*D := \sum_{x \in X} \left(\sum_{\pi(y)=x} m_y \right) x.$$

Montrer les faits suivants :

- (1) Pour tout diviseur D sur X on a $\deg(\pi^*D) = \deg \pi \cdot \deg D$.
- (2) Pour tout diviseur D sur Y on a $\deg(\pi_*D) = \deg D$.
- (3) Soit f une fonction méromorphe sur X non identiquement nulle. Alors

$$\pi^* \text{div}(f) = \text{div}(\pi^*f),$$

et en déduire que $\deg(\text{div}(f)) = 0$.

- (4) Soit f une fonction méromorphe sur Y non identiquement nulle. Alors

$$\pi_* \text{div}(f) = \text{div}(N(f)),$$

où $N(f)$ est la norme de f par rapport à l'extension $k(X) \subset k(Y)$.

Exercice 3. Soit B une algèbre sur un anneau A . Montrer les faits suivants :

- (1) Si B est une localisation ou un quotient de A , on a $\Omega_{B/A}^1 = 0$.
- (2) Pour toute A -algèbre A' on a $\Omega_{B'/A'}^1 \cong \Omega_{B/A}^1 \otimes_B B'$ où $B' = B \otimes_A A'$.
- (3) Soit $B \rightarrow C$ un morphisme de A -algèbres. Alors on a suite exacte

$$\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \longrightarrow \Omega_{C/A}^1 \longrightarrow \Omega_{C/B}^1 \longrightarrow 0.$$

- (4) Pour tout partie multiplicative $S \subset B$ on a $S^{-1}\Omega_{B/A}^1 \cong \Omega_{S^{-1}B/A}^1$.

- (5) Si $C = B/I$ pour un idéal $I \subset B$, on a une suite exacte

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \longrightarrow \Omega_{C/A}^1 \longrightarrow 0.$$

- (6) Si $B = A[x_1, \dots, x_n]$ et $I = (F_1, \dots, F_r)$ on a

$$\Omega_{C/A}^1 = \frac{Cdx_1 \oplus \dots \oplus Cdx_n}{(dF_1, \dots, dF_r)} \quad \text{où} \quad dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i.$$

- (7) Soit A une algèbre locale sur k d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et corps résiduel k . Alors

$$\Omega_{A/k}^1 \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

- (8) Pour une extension finie de corps $K \subset L$ on a

$$\Omega_{L/K}^1 = 0 \iff L \text{ est séparable sur } K.$$

- (9) Soit F un corps de fonctions sur k . Alors $\dim \Omega_{F/k}^1 = 1$.