

ARITHMÉTIQUE DES COURBES ELLIPTIQUES
FEUILLE DE TD 3

Exercice 1 (Examen 2024). Soient k un corps algébriquement clos et C une courbe projective lisse de genre g sur k munie d'un k -point $O \in C(k)$. Considérons l'application d'Abel–Jacobi

$$\begin{aligned} \text{AJ}_C: C(k) &\longrightarrow \text{Pic}^0(C) \\ P &\longmapsto \text{classe de } [P] - [O]. \end{aligned}$$

- (1) Démontrer que si $g = 0$ alors $\text{Pic}^0(C) = 0$.
- (2) Démontrer que si $g \geq 1$, alors l'application AJ_C est injective.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que l'application AJ_C est non nulle et surjective.

- (3) Démontrer que tout diviseur D de degré $d \geq 1$ sur C est linéairement équivalent à un diviseur effectif. En déduire que l'espace $L(D)$ est non nul.
- (4) Soit D un diviseur de degré $d \geq 2$ sur C , soit $f \in L(D)$ une fonction non nulle et soit $Q \in C(k)$ un point qui n'est pas un zéro de f . Décrire le sous-espace $L(D - [Q])$ de $L(D)$.
- (5) Soit D un diviseur de degré $d \geq 1$ sur C . Démontrer l'inégalité $l(D) \geq d$.
- (6) Conclure que si $g \geq 2$ l'application d'Abel–Jacobi n'est pas surjective.

Exercice 2. Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe projective lisse sur un corps k d'équation affine $f(x, y) = 0$. Montrer que les formes différentielles

$$\omega_{ij} = \frac{x^i y^j}{\partial f / \partial y} dx, \quad i, j \geq 0, \quad i + j \leq \deg(f) - 3,$$

sont régulières et forment une base des formes différentielles sur C .

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ et k un corps algébriquement clos de caractéristique ne divisant pas n . Calculer un représentant du diviseur canonique de la courbe projective lisse

$$C = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid x^n + y^n + z^n = 0\}.$$

Exercice 4. Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit $f(x) \in k[x]$ un polynôme de degré d sans racine double. On considère la courbe affine C_0 définie sur k d'équation

$$C_0: y^2 = f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0$$

- (1) Démontrer que C_0 est lisse.
- (2) On considère la clôture projective \overline{C}_0 de C_0 dans \mathbb{P}^1 , c'est-à-dire

$$\overline{C}_0: y^2 z^{d-2} = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} z + \cdots + a_d z^d$$

Démontrer que le point à l'infini $[0 : 1 : 0]$ de \overline{C}_0 est singulier si $d \geq 1$.

Supposons dorénavant que $d = 4$.

- (3) Considérons le morphisme $C_0 \rightarrow \mathbb{P}^3$ donné par

$$(x, y) \longmapsto [1 : x : y : x^2]$$

et la clôture $C \subset \mathbb{P}^3$ de son image. Soit H l'hyperplan de \mathbb{P}^3 défini par l'équation $X_0 = 0$. Démontrer que C est lisse.

- (4) Démontrer que $C \cap (\mathbb{P}^3 \setminus H)$ est isomorphe à C_0 .
- (5) Démontrer que $(C \cap H)(k)$ est soit vide si a_d n'est pas un carré dans k , soit formée des deux points $[0: 0: \pm \sqrt{a_d}: 1]$ si a_d est un carré.
- (6) Démontrer que

$$C = \{[x: y: z: t] \in \mathbb{P}^3: y^2 = -x^4 - 1, z = x^2\}$$

est une courbe projective lisse de genre 1 sur \mathbb{Q} qui n'est pas une courbe elliptique.

Exercice 5. Soit k un corps. Considérons une équation de Weierstrass

$$(W): y^2 = x^3 + ax + b,$$

avec $a, b \in k$ et définissons le *discriminant* comme

$$\Delta = -16(4a^3 + 27b^2).$$

- (1) Démontrer que (W) définit une courbe projective lisse si et seulement si $\Delta \neq 0$.
Si $\Delta \neq 0$, on définit le *j-invariant* par la formule

$$j = -1728 \frac{(4A)^3}{\Delta}.$$

- (1) Démontrer que si k est algébriquement clos, alors deux équations de Weierstrass ayant le même *j-invariant* définissent des courbes elliptiques isomorphes.
- (2) Soit $j_0 \in \bar{k}$. Démontrer qu'il existe une équation de Weierstrass définie sur $k(j_0)$ ayant *j-invariant* égal à j_0 .

Exercice 6. Soit E la courbe elliptique définie sur \mathbb{Q} d'équation affine

$$y^2 = x^3 + 17.$$

- (1) Vérifier que les points suivants sont dans $E(\mathbb{Q})$:

$$P_1 = (-2, 3), \quad P_2 = (-1, 4), \quad P_3 = (2, 5), \quad P_4 = (4, 9), \quad P_5 = (8, 23)$$

En trouver d'autres !

- (2) Vérifier les relations

$$2P_2 = \left(\frac{137}{64}, -\frac{2651}{512}\right), \quad P_1 + P_3 = \left(-\frac{8}{9}, -\frac{109}{27}\right).$$