CONTINUITÉ DES MESURES D'ÉQUILIBRE

(Sébastien Boucksom)

I) Analytification

2) Enveloppes rationnelles

$Y = \mathcal{M}(A) \supset W$ compact.

$$K(W) = \left\{ f = \frac{a}{b} \;\middle|\; \begin{array}{l} a, b \in A \\ b \neq 0 \text{ sur } W \end{array} \right\}$$

$y \in W \rightsquigarrow |f(y)| = \dfrac{|a(y)|}{|b(y)|}$. $\qquad \|f\|_W = \sup_W |f|$.

$A(W) =$ complété de $(K(W), \|\cdot\|_W)$.

enveloppe rationnelle : $\hat{W}^{rat} := \{ y \in Y \mid |a(y)| \leq \|f\|_W |b(y)| \;\; \forall f = \frac{a}{b} \in K(W) \}$

$$A \longrightarrow A(W) \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{M}(A(W)) \longrightarrow \mathcal{M}(A)$$

Prop (Poineau) : $\mathcal{M}(A(W)) \underset{\text{homéo}}{\simeq} \hat{W}^{rat}$

W rat. convexe si $W = \hat{W}^{rat}$. $\iff$ W défini par des inégalités rationnelles.

$\Longrightarrow \; W = \mathcal{M}(A(W))$

ex : Tout $y \in W$ a un voisinage de la forme

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} \{ r_i \leq |a_i|, \; |b_i| \geq s_i \}$$

$a_i, b_i \in A$

$r_i, s_i > 0$.

3) Analytification

X = A-schéma (type fini)

$$\begin{tikzcd} X^{an} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y = \mathcal{M}(A) \arrow[r] & \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$

[X^{an} espace topologique + corps complet en chaque point]

$X = \operatorname{Spec} B$ affine

$\longrightarrow$ $X^{an} = \left\{ \text{seminormes mult. } |\cdot| : B \to \mathbb{R}_+ \atop |f| \leq \|f\|_A \ \forall a \in A \right\}$

Rq: $y \in Y$, $x \in \pi^{-1}(y)$

$|\cdot|_x : B \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$|\cdot|_y : A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{tikzcd} B \arrow[r] & \mathcal{H}(y) \\ A \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{H}(x) \arrow[u] \end{tikzcd}$

$\Longleftrightarrow$ $B \underset{A}{\otimes} \mathcal{H}(x) \longrightarrow \mathcal{H}(y)$

$\rightsquigarrow$ $X_y^{an} := \pi^{-1}(y) \underset{\text{homéo.}}{\simeq} \left(X_{\mathcal{H}(y)} \right)^{an}$

Ex: Y esp. compact $\quad A = C^0(Y, \mathbb{C})$

X = A-schéma $\rightsquigarrow$ $X^{an} \longrightarrow Y$ famille C^0 d'esp. analytiques complexes.

II) Métriques d'équilibres

1) Métriques psh

X proj $/ A$.

L/X fibré en droites ample

$C^0(L) = \{$métriques continues φ sur $L^{an}\}$

notation additive $\varphi, \psi \in C^0(L) \implies \varphi - \psi \in C^0(X^{an}, \mathbb{R})$

$FS(L) = \{\varphi \in C^0(L) \mid \varphi = \frac{1}{m} \max\{\log|s_i| + \lambda_i\}\}$

"Fubini-Study l^∞"

$s_i \in H^0(X, L^{\otimes m})$ tq. sans zéros communs.

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{Q}$)

$PSH(L)$ = métriques psh sur L

$:=$ lim décroissant de "filets" dans $FS(L)$

$PSH(L)$ plus petite classe de métriques sing sur L^{an}

qui est stable par max, lim $\downarrow$, add.

contient $\frac{1}{m}\log|s|$, $s \in H^0(X, mL)$, $s \neq 0$

$CPSH(L) = C^0(L) \cap PSH(L) \underset{(\text{Dini})}{=} \overline{FS(L)}^{\text{conv unif.}}$

$DFS(X) = \{\frac{1}{m}(\varphi - \psi) \mid \varphi - \psi \in FS(L), m \geq 1\} \subset C^0(X^{an})$

~~$\in C^0(X^{an})$~~

$DFS(X^{an}) \xrightarrow{\text{Stone - Weierstrass}} DFS(X^{an}) \subset C^0(X^{an})$ dense

$\mathbb{Q}$-esp vect stable par max (et min)

sépare les pts de X^{an}

2) Métriques d'équilibre

$f : X \longrightarrow X \qquad f^* L \simeq dL \qquad d \geq 2. \quad (\Longrightarrow f \text{ fini})$

$\frac{1}{d} f^* : C^0(L) \circlearrowleft \quad \frac{1}{d}$ Lipschitz.

$\Longrightarrow$ unique pt fixe $\varphi_f \in C^0(L) = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{d} f^*\right)^m \varphi_0$

$\forall \varphi_0 \in C^0(L)$.

$\varphi_0 \in FS(L) \Longrightarrow \varphi_m := \left(\frac{1}{d} f^*\right)^m \varphi_0 \in FS(L)$

$FS(L)$ stable par $\left(\frac{1}{d} f^*\right)$

$\downarrow m \to \infty$

$\varphi_f \in CPSH(L)$.

$X^{an} \xrightarrow{\pi} Y = \mathcal{M}(A) \qquad X^{an}_y = \pi^{-1}(y) = X^{an}_{\mathcal{H}(y)}$

$\forall y \in Y \qquad \underbrace{\varphi_f|_{X^{an}_y}}_{\varphi_{f_y}} \in CPSH(L^{an}_y)$.

ex : $f : \mathbb{P}^n_A \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$. $\qquad f^* \mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}(d)$.

$[z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_0^d : \cdots : z_n^d]$.

$\Longrightarrow \varphi_f = \max \log |z_i|$.

III) Continuité des Mesures de Monge-Ampère

1) Mesures de MA

X proj plat sur $A \longrightarrow \begin{cases} n = \dim X_y \\ V = (L^n_y) \text{ loc. const.} \end{cases}$

$\varphi \in CPSH(L)$

$\varphi_y := \varphi|_{X^{an}_y} \in CPSH(L_y) \Longrightarrow MA(\varphi_y)$ mesure de MA de φ_y

X^{an}_y esp. analytique$/\mathcal{H}(y)$

$MA(\varphi_y) = V^{-1} (dd^c \varphi_y)^n$ mesure de proba (Radon) sur $X^{an}_y \subset X^{an}$

$$\varphi_i \xrightarrow{\text{unif.}} \varphi \in CPSH(L)$$
$$\varphi_i \in CPSH(L) \implies \forall y \quad MA(\varphi_{i,y}) \xrightarrow[\text{faible}]{\text{conv}} MA(\varphi_y).$$

famille de mesure

ex : $(X,L) = (\mathbb{P}^n_A, \mathcal{O}(1))$

$$\varphi = \max \log |z_i|$$

$$y \in Y = M(A) \longrightarrow MA(\varphi_y) = \begin{cases} \text{mesure de Haar sur } (|z_i|=1) \subset \mathbb{G}_m^{an}, \mathcal{H}(y) \subset \mathbb{P}^n_y & y \in Y_A. \\ \delta_{\gamma_y} & y \in Y_{NA} \end{cases}$$

$\gamma_y \in (|z_i| = 1)$ <u>point de Gauß</u>

$$|P(\gamma_y)| = \sup_{|z_i| \leq 1} |P| = \sup_{|z|=1} |P|.$$

On dira que $\varphi \in CPSH(L)$ a <u>MA continue</u> si $MA(\varphi_y)$ cont en $y \in Y$.

$\iff \forall \psi \in C^0(X^{an}) \quad y \mapsto \int_{X_y^{an}} \psi \, MA(\varphi_y)$ continue sur Y.

$\iff$ idem avec $\psi \in DFS(X)$.

Prop : (i) $\{\varphi \in CPSH(L) \mid MA(\varphi) \text{ continu}\}$ est fermé

(ii) $\varphi \in CPSH(L)$, MA cont.

$\pi : \tilde{X} \to X$ fini plat $\implies \pi^* \varphi \in CPSH(\pi^* L)$ a MA cont.

Cor. $f : (X,L) \circlearrowleft$ système dynamique polarisé

$f^* L \simeq dL$, $d \geq 2$

Alors φ MA cont $\iff \exists \varphi \in CPSH(L)$ MA cont.

Preuve: (i) $\psi \in$ ~~CPSH(L)~~ DFS (X).

$$\varphi_i \longrightarrow \varphi \quad \text{ds } CPSH(L).$$

Il suffit de montrer:

$$\int_{X_Y^{an}}^{F} \psi \, MA(\varphi_{i,Y}) \longrightarrow \int_{X_Y^{an}} \psi \, MA(\varphi_Y)$$

Qps $\psi = \psi_0 - \psi_0'$; $\psi_0, \psi_0' \in FS(L)$

Chern-Levine-Nirenberg:

$$\left| \int (\psi_0 - \psi_0') \left(MA(\varphi_{i,Y}) - MA(\varphi_Y) \right) \right| \leq n \sup_{X_Y^{an}} |\varphi_{i,Y} - \varphi_Y|.$$

(ii) π deg d.

$$\pi^*\varphi \in CPSH(L)$$

$$\psi = \frac{1}{m} \max_i \left(\log|s_i| + \lambda_i \right)$$

$s_i \in H^0(\tilde{X}, m\pi^*L)$.

norme: $N_{\tilde{X}/X}(s_i) \in H^0(X, dmL)$

$$\pi_*\psi := \frac{1}{m} \max \left(\log |N_{\tilde{X}/X}(s_i)| + \lambda_i \right) \in FS(dL).$$

$\psi_0, \psi_0' \in FS(\pi^*L)$

$$\Longrightarrow \int_{\tilde{X}_Y^{an}} (\psi_0 - \psi_0') \, MA(\tilde{\varphi}_Y) = \int_{\tilde{X}_Y^{an}} (\pi_*\psi_0 - \pi_*\psi_0') \, MA(\varphi_Y)$$

Question: cont MA toujours vraie ?

Thm (Favre) OK si $A = \mathbb{C}hyp$.

$\square$

Thm (Poineau) : $(A, \|\cdot\|)$ Banach quelconque.

$(X, L) = (\mathbb{P}^1_A, \mathcal{O}(1))$

$\varphi = \max(\log|z_0|, \log|z_1|)$ a MA continue.

démo :

$y \in Y = \mathcal{M}(A)$

$$\mu_y = \begin{cases} \text{Haar de } \{|z|=1\} \subset \mathbb{A}^1_y & \\ \delta_y & y \in Y_{NA} \end{cases}$$

continue en y ?

a) Continue sur Y_{NA} :

$y \longmapsto \gamma_y$ continue sur Y_{NA}.

$P \in A[z]$ $\quad P = \sum a_i z^i$ $\quad |P(\gamma_y)| = \max |a_i|_y$.

b) Continue sur Y_{arch}

OPS $Y_{arch} = Y = \mathcal{M}(A)$ $\quad (A \rightsquigarrow A(W))$.

$\mathbb{Z} \hookrightarrow A$ s'étend par densité en $\mathbb{R} \hookrightarrow A$.

$A \rightsquigarrow A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$: OPS $\mathcal{H}(y) = \mathbb{C}$.

μ_y unique mesure à supp de $(|z|=1) \subset \mathbb{C} = \mathbb{A}^{1,an}_y$.

$y_i \longrightarrow y \in Y = Y_{an}$. $\quad$ * μ supp de $|z|=1$?

$\mu_{y_i} \longrightarrow \mu$ (v.a.). $\quad$ * μ S^1-inv. $\quad \Big\} \Longrightarrow \mu = \mu_y$.

<u>Cas subtil</u> : $y_i \in Y \longrightarrow y \in Y_{NA}$.

OPS $\mu_{y_i} \longrightarrow \mu$ (compacité des mesures)

Mq $\operatorname{supp} \mu \subset \{\gamma_y\}$

μ_{y_i} supp ds cercle $(|z|=1) \subset A^1_{y_i}$

$\Longrightarrow$ μ_y supp ds $(|z|=1) \subset A'_y$.

$x \in (|z|=1) \subset A'_y$

Mq est nulle au voisinage de x.

$\exists P \in \mathcal{H}(y)[z]$ tq $|P(x)| < |P(\gamma_y)| = 1$.