<u>Théorème</u> (DKY, PII) : $\exists\, C_1 \geq 1$ ne dép que de $d \geq 2$ tq

$\forall\, f, g : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ de degré d

$\forall\, F \subset \overline{\mathbb{Q}}$ fini Galois-inv., $\forall\, \delta \in]0,1]$

$$\langle \mu_f, \mu_g \rangle \leq 4 \max\left(h_f(F), h_g(F) \right)$$
$$+ C_1 \left(\delta - \frac{\log \delta}{\# F} \right) \left(\underbrace{h_{\mathcal{F}}([f,g])}_{\max\, h(f),\, h(g)} + 1 \right).$$

<u>démo</u>: $(f,g) \in Rat_d \times Rat_d \subset \mathbb{P}^{2d+1} \times \mathbb{P}^{2d+1}$

$F : \mathbb{A}^2_{Rat_d} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{Rat_d}$ famille de relevés.

$$u_t = \frac{1}{d} \log \| F_t \| - \log \| \cdot \|.$$

$$|u_t|_v \leq \underbrace{\log^+ \|t\|_v}_{\overset{\shortparallel}{c}(F_t)} + C(v)$$

$c(v) = 0$ presque pour tout v.

$$C_2(F_t) \leq C' \left[\log^+ \|t\|_v + C(v) \right]$$

$$C_3(f_t) \leq \begin{cases} \sup |f_t|_v & \text{archimédien} \\ \dfrac{\| f \|_v^{2d}}{|\mathrm{Res}(F_t)|} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$C_3(f_t) \leq C'^{F} (1 + \|t\|')$$

$\uparrow$

$C' \geq 1$ si varch.

<u>Condition:</u> $\forall t \in Rat_d(\bar{\mathbb{Q}})$

$$|g_{t,v}(x) - g_{t,v}(y)| \leq C \left| \log^+ |t|_v + C(v) \right| d(x,y)^{\frac{c'}{c'(v) + \log^+\|t\|_v}}.$$

C, C' ne dépendent que de d.

<u>preuve:</u> $\varepsilon = (\varepsilon_v)$ $\quad f = f_{t_1} \quad g = f_{t_2}$.

$$\langle \mu_{t_1}, \mu_{t_2} \rangle \leq \left(\langle \mu_{t_1}, m_{F,\varepsilon} \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle \mu_{t_2}, m_{F,\varepsilon} \rangle^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

$$\leq 4 \max_i \langle \mu_{t_i}, m_{F,\varepsilon} \rangle$$

$$\leq 4 \max_i h_{f_{t_i}}(F) + \frac{2}{\#F} \sum_{v \in M_K} N_v \log\left(\frac{1}{\varepsilon_v}\right)$$

$$+ 2 \sum_{v \in M_K} N_v \cdot \max_i \left| (\mu_{f_{t_i}}, m_{F,\varepsilon,v} - m_{F,v}) \right|.$$

Soit $0 < \delta < 1$.

$$\varepsilon_v := \delta^{\frac{1}{c'_v}(\log^+\|t\| + (1)_v)} \qquad (1)_v = \begin{cases} 1 & \text{si varch} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

ε_v pour presque tout v.

$$g_F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{d^n} u(f^n(z)).$$

$$\Longrightarrow \quad \mu_f - \delta_{can} = dd^c g_F.$$

$$c_1(F) = \sup_{\shortparallel} |u|$$

$$c_2(F) \geq 0 \qquad |u(z) - u(w)| \leq c_2 \, d(z,w).$$

$$c_3(f) \qquad tq \quad d(f(z), f(w)) \leq c_3 \, d(z,w).$$

<u>Prop</u>: si $c_3(f) > 1$ $\quad |g_f(z) - g_f(w)| \leq C(d)(c_2 + c_1) \, d(z,w)^{\frac{1}{\log c_3}}$

$c_3(f) = 1$ $\quad |g_f(x) - g_f(y)| \leq C(d)(c_2 + c_1) \, d(x,y)$

<u>preuve</u>: $N \geq 1$ donné

$$|g_F(x) - g_F(y)| \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{d^n} \underbrace{|u \circ f^n(x) - u \circ f^n(y)|}_{\leq c_2(F) \, c_3(f)^n \, d(x,y)} + 2 c_1(F) \, d^{-N}.$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} c_2(F) \left(\frac{c_3(f)}{d}\right)^n d(x,y) + 2 c_1(F) \, d^{-N}$$

$$N \simeq - \frac{\log d(x,y)}{\log c_3}$$

$$\leq c_2(F) \left(\frac{c_3}{d}\right)^{N+1} d(x,y) + 2 c_1(F) \underbrace{d^{-N}}_{\sim d(x,y)^{\frac{\log d}{\log c_3}}}$$

$$\lesssim C(d) \left(c_2(F) + c_1(F)\right)$$

2) Comparaison avec μ_f adélique.

$f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ déf sur K

Lemme : $\forall\, \varepsilon = \{\varepsilon_v\}_v$ rayon adélique $\forall F \subset K$ fini.

$$\langle \mu_f, m_{F,\varepsilon} \rangle \leq \underset{\langle \mu_f, m_F \rangle}{h_f(F)} + 2 \sum_{v \in M_K} N_v \left| (\mu_{f,v}, m_{F,\varepsilon,v} - m_{F,v})_v \right|$$

$$- \frac{2}{\# F} \sum_{v \in M_K} N_v \log \varepsilon_v .$$

preuve : $(\mu_{f,v} - m_{F,\varepsilon,v} , \mu_{f,v} - m_{F,\varepsilon,v})$

$$= (\mu_{f,v}, \mu_{f,v})_v - \underbrace{2\,(m_{F,\varepsilon,v}, \mu_{f,v})}_{(m_{F,v}, \mu_{f,v}) + (m_{F,\varepsilon,v} - m_{F,v},\, \mu_{f,v})} + \underbrace{(m_{F,\varepsilon,v}, m_{F,\varepsilon,v})}_{\leq (m_{F,v}, m_{F,v}) - \frac{2}{\# F} \log \varepsilon_v} .$$

$$\leq (\mu_{f,v} - m_{F,v}, \mu_{f,v} - m_{F,v}) - \frac{2}{\# F} \log \varepsilon_v + (\mu_{f,v}, m_{F,\varepsilon,v} - m_{F,v})$$

5) Potentiel Hölder de μ_f

$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ $\deg d \geq 2$ sur $(K, |.|)$

$F : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ relevé.

$$u(z) = \frac{1}{d} \log \| F(z) \| - \log \| z \| .$$

$$dd^c u = \frac{1}{d} f^* \lambda_{S^1} - \lambda_{S^1} .$$

δ can δ can.

4) Energie mutuelle et approximation

$K, |\cdot|$ = complet, alg. clos, non triv.

Lemme (FRL, Fili) : $F \subset K$ fini, $0 < \varepsilon \leq 1$

$$(m_{F,\varepsilon}, m_{F,\varepsilon}) \leq (m_F, m_F) - \frac{1}{\# F} \log \varepsilon.$$

preuve: Sur $\mathbb{C}$: si $z \neq z'$

$$-(\lambda_{S'(z,\varepsilon)}, \lambda_{S'(z,\varepsilon)}) = \int_0^1 \int_0^1 \log |z + \varepsilon e^{2\pi i t} - (z' + \varepsilon e^{2\pi i s})| \, dt\, ds.$$

$$= \int_0^1 \log \max \{ |z - (z' + \varepsilon e^{2\pi i s})|, \varepsilon \} \, ds$$

$\uparrow$

$$\int_0^1 \log |z - e^{2\pi i t}| \, dt = \log^+ |z|.$$

$$= \log \max (|z - z'|, \varepsilon) \geq \log |z - z'| \geq -(\delta_z, \delta_{z'}).$$

$$(\lambda_{S'(z,\varepsilon)}, \lambda_{S'(z,\varepsilon)}) \leq (\delta_z, \delta_{z'}) \quad \text{si } z \neq z'$$

$$\leq \log \varepsilon \quad \text{si } z = z'. \qquad (= \text{ en fait}).$$

$$(m_{F,\varepsilon}, m_{F,\varepsilon}) = \int_{\mathbb{C}^2 \setminus \Delta} \log |z - w| \, dm_{F,\varepsilon}(z) \otimes dm_{F,\varepsilon}(w)$$

$$= \frac{1}{(\# F)^2} \sum_{x,y \in F} (\lambda_{S'(x,\varepsilon)}, \lambda_{S'(y,\varepsilon)}).$$

$$\leq \frac{1}{(\# F)^2} \sum_{\substack{x \neq y \\ x,y \in F}} (\delta_z, \delta_{z'}) + \frac{1}{(\# F)^2} \sum_{x \in F} -\log \varepsilon$$

Ex: Si $\rho = \{\delta_{can,v}\}_{v\in M_K}$

$$h_\rho(\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{v\in M_K} N_v\left(\delta_{can,v} - m_{F,v}, \delta_{can,v} - m_{F,v}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{v\in M_K} N_v \int_{\mathbb{A}^2\setminus\Delta} \log|z-w| \, d\rho_v(z) \otimes d\rho_v'(w)$$

$$\rho_v = \delta_{can,v} - m_{F,v}.$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_v -N_v \left[\overbrace{\int \log|z-w| \, d\delta_{can}(z)\otimes d\delta_{can}(w)}^{''}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{\# F}\sum_{x\in F}\log^+|x|_v + \frac{1}{(\# F)^2}\sum_{\substack{x\neq y\\ x\in F}}\log|x-y|_v\right]\right.$$

$$h_\rho(\alpha) = \sum_{v\in K}\frac{1}{\# F}\sum_{x\in F}\log^+|x|_v - \frac{1}{2(\# F)^2}\sum_{\substack{x\neq y\\ x,y\in F}}\underbrace{\sum_{v\in M_K}\log|x-y|_v}_{=0 \text{ formule du produit.}}$$

2) $h_{\mu_f}(\alpha) = h_f(\alpha)$. $\quad f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad f^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(d)$

$$h_{nv}(f(x)) = d\, h_{nv}(x) + O(1)$$

$$\Longrightarrow \quad h_f = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{d^n} h_{nv}\circ f^n$$

unique tq

$$\begin{cases} h_f := h_{nv} + O(1) \\ h_f\circ f = d\, h_f \end{cases}$$

On pose pour ρ, ρ' mesures adéliques

$$\langle \rho, \rho' \rangle := \frac{1}{2} \sum_{v \in M_K} \langle \rho_v, \rho'_v \rangle .$$

Rq : 1) Si $\{\|\cdot\|_v\}_v$, $\{\|\cdot\|'_v\}$ métriques semi-positives adéliques $\mathcal{O}(1)$

$$\begin{cases} \rho_v = c_1(\mathcal{O}(1), \|\cdot\|_v) \\ \rho'_v = c_1(\mathcal{O}(1), \|\cdot\|'_v) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \overline{L} &= (\mathcal{O}(1), \{\|\cdot\|_v\}) \\ \overline{L}' &= (\mathcal{O}(1), \{\|\cdot\|'_v\}). \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ $\rho = \{\rho_v\}$, $\rho' = \{\rho'_v\}$ mesures adéliques.

$$\langle \rho, \rho' \rangle = \frac{1}{2} \widehat{\deg}\left(c_1(\overline{L}) \cdot c_1(\overline{L}') \right).$$

2) $f, g : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ $\deg \geq 2$.

$$\Longrightarrow \quad \langle \mu_f, \mu_g \rangle = 2 \, \hat{h}_{(f,g)}(\Delta)$$

Théorème (Fili) : $\forall \rho_1, \rho_2, \rho_3$ mesures adéliques.

$$\langle \rho_1, \rho_2 \rangle^{1/2} \leq \langle \rho_1, \rho_3 \rangle^{1/2} + \langle \rho_2, \rho_3 \rangle^{1/2} .$$

preuve : $\langle \rho, \rho \rangle$ forme quadratique. $\square$

III) Énergie mutuelle et hauteur

$\rho = \{\rho_v\}_{v \in M_K}$ mesure adélique

$h_\rho : \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini pour $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$

$$h_\rho(\alpha) = \langle \rho, m_F \rangle \qquad m_F = \left\{ \frac{1}{\# F} \sum_{y \in F} \delta_y \right\}_{y \in F}.$$

$F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K) \cdot \alpha$

3) Cas global

K corps de nombres $\rho = \{\rho_v\}_{v \in M_K}$

est une mesure adélique si

(1) $\forall v \in M_K$, ρ_v est une proba sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_v}$ à pot. continue

En part si $\delta_{can,v} = \begin{cases} \lambda_{S^1,v} & v \text{ arch.} \\ \delta_{0,1} & \text{sinon.} \end{cases}$

$\rho_v - \delta_{can,v} = dd^c g_v$, $g_v \in C^0(\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_v}, \mathbb{R})$

(2) $\exists E \subset M_K$ fini tq $\forall v \notin E$, $\rho_v = \delta_{can,v}$

Exemples : ① K corps de nombres, $F \subset K$ fini.

$F_v \subset \mathbb{C}_v$ son image $\{r_v\}_{v \in M_K}$

$\begin{cases} r_v \ni]0,1] & \forall v \in M_K \\ r_v = 1 & \text{pour presque tout } v. \end{cases}$

$m_{F,r_v} := \begin{cases} \dfrac{1}{\# F} \displaystyle\sum_{x \in F} \delta_{x,r_v} & v \text{ non-arch.} \\ \dfrac{1}{\# F} \displaystyle\sum_{x \in F} \delta_{S^1(x,1)} & v \text{ arch.} \end{cases}$

2) $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ degré $d \geq 2$.

$\mu_f = \{\mu_{f,v}\}_{v \in M_K}$ mesure adélique ~~métrique~~

$f = z^d \rightarrow \mu_{f,v} = \delta_{can,v}.$

Quitte à remplacer g par $g - g(\infty)$ ops $g = g_\rho$.

$$(\rho,\rho) = -\int_{\mathbb{C}} g\, dd^c g$$

$$\begin{array}{ccccc}
-\displaystyle\int_{D(0,R)} g\, dd^c g & = & \displaystyle\int_{D(0,R)} dg \wedge d^c g & - & \displaystyle\int_{\{|z|=R\}} g\, d^c g \\
\Big\downarrow {\scriptstyle R\to\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle R\to\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle R\to\infty}
\end{array}$$

$$(\rho,\rho) = -\int_{\mathbb{C}} g\, dd^c g = \int_{\mathbb{C}} dg \wedge d^c g - \underbrace{g(\infty)}_{=0} \qquad \square$$

Si μ,ν proba sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ on pose

$$\langle \mu,\nu \rangle = \frac{1}{2}(\mu-\nu, \mu-\nu)$$

⚠ Quand c'est bien défini...

2) Cas non-archimédien

Ça marche pareil μ,ν proba sur $\mathbb{P}^{1,an}_K$

$$\langle \mu,\nu \rangle := \frac{1}{2}(\mu-\nu, \mu-\nu) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{A}^{1,an}_K \times \mathbb{A}^{1,an}_K \setminus \Delta^{an}} -\log|z-w| \, d(\mu-\nu)(z) \otimes d(\mu-\nu)(w).$$

Bien défini si :

- μ potentiel continu et
- ν potentiel continu (ou support fini)

$\mu - \lambda_{S^1} = dd^c u$, u continue (sur $\mathbb{C}$)

$\mu - \delta_{0,1} = dd^c u$, u continue

<u>Exemple</u>: Si $|\rho|$ à potentiel continu, i.e :

$\forall U \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \quad |\rho| = dd^c u, \quad u \in C^0(U, \mathbb{R})$

(ρ, ρ') bien défini si

- ρ' support fini et $\rho'(\{\infty\}) = 0$
- $|\rho'|$ à potentiel C^0.

<u>Prop.</u> : ρ tq $\rho(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = 0$ et $|\rho|$ à potentiel continu

$\rho = dd^c g$, $g \in C^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ et

(1) $(\rho, \rho) = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} dg \wedge d^c g \geq 0.$

(2) $(\rho, \rho) = 0 \iff \rho = 0.$

<u>démo.</u> $\rho(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = 0 \Longrightarrow \rho = dd^c g$.

g continue car $\rho|_U = dd^c u$, u continue sur U

$u - g$ harmonique $\Longrightarrow u = g +$ harmonique $\Longrightarrow$ continue.

$$(\rho, \rho) = - \int_{\mathbb{C}^2 \setminus \Delta} \log|z-w| \, d\rho(z) \otimes d\rho(w)$$

$$= - \int_{\mathbb{C}} \underbrace{\left[\int_{\mathbb{C}} \log|z-w| \, d\rho(w) \right]}_{g_\rho \quad g + \text{constante}.} d\rho(z)$$

$dd^c g_\rho = \rho \Longrightarrow g_\rho = g + \text{const.}$

$\lim_{z \to \infty} g_\rho(z) = 0$ car $\rho(\{\infty\}) = 0.$

Théorème G (P II)

$$< L_a, L_b > \leq \left(\beta + \frac{C(\beta)}{\# F}\right) (h([a:b]) + 1)$$

L_a, L_b
Lattès
déf sur $\overline{\mathbb{Q}}$

$F \subseteq \{$ pts prépériodiques $\}$ communs à L_a et L_b

1) Hauteur ample sur une variété projective

Sur $\mathbb{P}^N$, hauteur naive :

$x \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$

$\overline{\mathbb{Q}} \supseteq K$ corps de nombres contenant $x_0, \dots, x_N$.

$x = [x_0 : \dots : x_N] \in \mathbb{P}^N(K)$

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \max_{i=0,\dots,N} |x_i|_v .$$

2) Energie mutuelle de deux mesures sur $\mathbb{P}^1$

$K, |\cdot|$ complet, alg clos, $|K^*| \neq \{1\}$.

1) Le cas complexe

$\Delta \subset \mathbb{C}^2$ diagonale, ρ, ρ' mesure signée sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$$(\rho, \rho') := \int_{\mathbb{C}^2 \setminus \Delta} \log|z-w| \, d\rho(z) \otimes d\rho'(w).$$

$\rho = \rho_+ - \rho_-$, $|\rho| = \rho_+ - \rho_-$ trace de ρ.

(ρ, ρ') bien déf si $\log|z-w| \in L^1(|\rho| \otimes |\rho'|)$ sur $\mathbb{C}^2 \setminus \Delta$

$$\frac{2}{\# F} \sum N_v \log \frac{1}{\varepsilon_v} \leq - \frac{2 \log \delta}{\# F} \left[\sum_{v \in M_K} N_v \left(\log^+ \|t\|_v + C(v) \right) \right]$$

$$\leq - \frac{2 \log \delta}{\# F} \left(h(t) + C'' \right)$$

$$\left| \left(\mu_{f_{t_i}}, m_{F,\varepsilon,v} - m_{F,v} \right) \right| \leq \left| g_{F_{t_i}} \left(m_{F,\varepsilon,v} - m_{F,v} \right) \right| + \log | \mathrm{Res}(F_t) |_v$$

$$\leq C \left(\log^+ \|t\|_v + C(v) \right) \delta.$$