FIN DE LA PREUVE

§0. Énoncés

k corps alg. clos car 0

E_i courbe elliptique $/k$ $i=1,2$

$$\begin{array}{c} E_i \\ \downarrow \pi_i \\ \mathbb{P}^1 \end{array} \quad \deg \pi_i = 2 \qquad \pi_i \in H^0(E, \mathcal{O}(P+Q)) \quad P+Q=0$$

$(E_1,\pi_1) \cong (E_2,\pi_2)$ si $\underbrace{\pi_1(E_1[2])}_{\text{Ram}\,\pi_1} = \underbrace{\pi_2(E_2[2])}_{\text{Ram}\,\pi_2}$.

Th (Poineau) : $\exists C>0$ t.q. pour tout corps k alg. clos car 0 et

$\forall (E_1,\pi_1) \not\cong (E_2,\pi_2)/k \Longrightarrow |\pi_1(E_1^{\text{tors}}) \cap \pi_2(E_2^{\text{tors}})| < C$.

Rq : Manin - Mumford $\Longrightarrow |\pi_1(E_1^{\text{tors}}) \cap \pi_2(E_2^{\text{tors}})| < +\infty$.

§1. Réduction à $\overline{\mathbb{Q}}$

$\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset k$.

$\exists R \subset k$ $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbre de t.f. et

$$\begin{array}{c} \mathcal{E}_i \\ p_i \downarrow \\ \mathbb{P}^1_R \end{array}$$

$\mathcal{E}_i$ = courbe elliptique $/R$

= R-schéma propre et lisse fibres géom. connexes de dim 1 et genre 1 + $e : \underset{\operatorname{Spec} R}{\overset{\shortparallel}{S}} \to \mathcal{E}$ section

t.q.

① $(\mathcal{E}_i, p_i) \otimes k = (E_i, k)$

② $s \in S(\overline{\mathbb{Q}}) \Longrightarrow (\mathcal{E}_{1,s}, p_{1,s}) \not\cong (\mathcal{E}_{2,s}, p_{2,s})$

$$\Longrightarrow \quad |\pi_1(E_1^{tors}) \cap \pi_2(E_2^{tors})| \leq |p_{1,s}(\mathcal{E}_{1,s}^{tors}) \cap p_{2,s}(\mathcal{E}_{2,s}^{tors})|$$

$\forall s \in S(\overline{\mathbb{Q}})$

§2. <u>Énoncé</u> (pour les pts de hauteur petite)

K corps de nombres

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Hauteur dynamique

$$h_{(E,\pi)} : \mathbb{P}^1(\overline{K}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

<u>Lattès</u>:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "{[2]}", "4:1"'] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
E/\{\pm 1\} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"', "2"] & E/\{\pm 1\} \arrow[d, "2"', "\pi"] \\
\mathbb{P}^1 \arrow[r, "4:1", "L_{(E,\pi)}"'] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

$h : \mathbb{P}^1(\overline{K}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

hauteur usuelle

$$h([x_0 : x_1]) = \frac{1}{[L : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_L} \log \max(|x_0|_v, |x_1|_v)$$

L : sous-corps de $\overline{K}$ tq. $x \in \mathbb{P}^1(L)$

$$h_{(E,\pi)}(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{4^n} h\left(L^n_{(E,\pi)}(x)\right)$$

* $h_{(E,\pi)}(x) \geq 0$ avec égalité $\Longleftrightarrow$ x prépériodique pour $L_{(E,\pi)}$

$\Longleftrightarrow$ $x = \pi(y)$ avec $y \in E^{tors}$

([P, Th. 8.3])

Th : Il existe $\varepsilon, C > 0$ tq

$\forall\ (E_1, \pi_1) \not\cong (E_2, \pi_2)$ déf sur $\overline{\mathbb{Q}}$

$$\Downarrow$$

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}}) \;\middle|\; \max_{i=1,2} h_{(E_i, \pi_i)}(x) < \varepsilon \right\} \right| \leq C.$$

En particulier

$$\left| \pi_1(E_1^{tors}) \cap \pi_2(E_2^{tors}) \right| \leq C.$$

§3. Métriques et mesures d'équilibre

K corps ~~non~~ complet.

X/K variété proj. lisse

L/X fibré en droites ample

$f : X \longrightarrow X$ tq $f^*L \cong L^{\otimes d}$ $\quad d \geq 2$.

$\| \cdot \|_0$ métrique continue psh sur L^{an}

$*$ $\displaystyle \| \cdot \|_f := \lim_{n \to \infty} \left[(f^n)^* \| \cdot \| \right]^{1/d^n}$.

métrique d'équilibre : continue psh.

$*$ $\mu_f = dd^c(-\log \| \cdot \|_f)$ $\quad$ mesure de Radon ≥ 0 sur X^{an}

e.g. $X = \mathbb{P}^1$, $L = \mathcal{O}(1)$, $d = 4$, $f = L_{(E, \pi)}$.

μ, ν mesures sur $\mathbb{P}^{1,an}$

$$(\mu, \nu) := \int_{(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \Delta)^{an}} \log|z - w| \, d\mu(z) \otimes d\nu(w)$$

$$\langle \mu, \nu \rangle = \frac{1}{2}(\mu-\nu, \mu-\nu).$$

Ex ($K = \mathbb{C}$) : ($K = \mathbb{C}_p$)

1) μ = mesure de Haar sur $S^1 \subset \mathbb{C}$ — mesure de Dirac en $\zeta_{0,1} \in \mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p}$ (point de Gauss)

dirac en z.

$$\langle [z], \mu \rangle = -\log^+ |z|. \quad (z \in \mathbb{C})$$

2) $(\mu, \mu) = 0$ & $([z],[z]) = 0$.

Rq ([FR, Prop 4.5]) : $\mu(\mathbb{P}^{1,an}_K) = 0$ et μ potentiel continu $\Rightarrow (g\rho, g\rho) = (\rho, \rho)$ $\forall g \in PGL_2(K)$.

§4. Retour sur les hauteurs dynamiques

K corps de nombres

déf. 1) Une mesure adélique sur $\mathbb{P}^1$ est $\mu = (\mu_v)_{v \in M_K}$

où μ_v est une mesure de proba sur $\mathbb{P}^{1,an}_{K_v}$ tq

$\mu_v = [\zeta_{0,1}]$ pour presque toutes les places non-arch.

(+ "potentiel continu" à toutes les places :

$$\mu_v = \begin{cases} \lambda_{S^1} + \Delta g & v \text{ arch.} \\ [\zeta_{0,1}] + \Delta g & v \text{ non-arch.} \end{cases} \Bigg).$$

2) $F \subseteq \mathbb{P}^1(\overline{K})$ stable sous $Gal(\overline{K}/K)$

$$h_\mu(F) := \sum_{v \in M_K} \langle \mu_v, [F]_v \rangle$$

$[F]_v$: mesure de proba sur $\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_v}$ équidistribuée en F et puis poussée $\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_v} \to \mathbb{P}^{1,an}_{K_v}$.

3) $x \in \mathbb{P}^1(\overline{K})$ $\quad h_\mu(x) := h_\mu(Gal(\overline{K}/K).x)$

Ex : $f : \mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$ degré $d \geq 2$.

$v \in M_K \rightsquigarrow \mu_{f,v} = dd^c(-\log \|\cdot\|_{f,v})$

v place finie t.q. f s'étend à $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_{K_v}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}_{K_v}}$ plat

$$\Rightarrow \mu_{f,v} = [\eta_{0,1}]$$

$\longrightarrow \mu_f = (\mu_{f,v})_v$ mesure adélique

$x \in \mathbb{P}^1(\overline{K})$: $h_{\mu_f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{h(f^n(x))}{d^n}$ hauteur canonique

Th 1 ([P,Th,B]) : Il existe $\delta > 0$ tq pour tout $(E_1,\pi_1) \not\cong (E_2,\pi_2)$ déf sur $\overline{\mathbb{Q}}$

$$< \mu(E_1,\pi_1), \mu(E_2,\pi_2) > \geq \delta.$$

$$\mu(E,\pi) = \mu_{L_{E,\pi}} \qquad \qquad \sum_v < \mu(E_1,\pi_1), \mu(E_2,\pi_2) >_v$$

§5. Espaces de modules

$a = (a_1, -, a_4) \in (\mathbb{P}^1)^4$ $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$.

$$\begin{array}{l} E_a \\ \downarrow \pi_a \\ \mathbb{P}^1 \end{array}$$

revêtement double ramifié en $a_1, \ldots, a_4$.

* structure de courbe elliptique : choix $a_i \leftrightarrow p_i \in E_i$

mais $L(E_a, \pi_a)$ indépendant du choix.

sur $\mathbb{Z}[1/2]$:

$$\begin{tikzcd} & & & \mathbb{P}^1 & x \\ E \arrow[rrr] \arrow[d] & & & \{y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \arrow[u] \arrow[d, "\text{famille de Legendre}"] & (x,y) \arrow[u, mapsto] \\ M := (\mathbb{P}^1)^4 \setminus \Delta \arrow[u, bend left, "e"] \arrow[rrr, "\text{birapport}"] \arrow[rrr, phantom, "\square"] & & & \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\} \arrow[u, bend left, "{[0:0:1] = \infty}"] \end{tikzcd}$$

$\circlearrowleft$ SL_2 ; Δ : "grosse diagonale" $x_i = x_j$ $\exists i \neq j$.

quotient par SL_2

$\longrightarrow$ proj standard : $\pi : E \longrightarrow \mathbb{P}^1_M$

$\longrightarrow$ Lattès en famille : $\underset{\circlearrowleft [2]}{E} \longrightarrow E/\{\pm 1\} \xrightarrow[\sim]{\pi} \underset{\circlearrowleft L_{E,\pi}}{\mathbb{P}^1_M}$

$\longrightarrow$ espace des paramètres

$$Z := (\overset{a}{\underset{\cap}{}}M \times \overset{b}{\underset{\cap}{}}M) \setminus \Delta^{sym} \longleftarrow \{a_1, \ldots, a_4\} \neq \{b_1, \ldots, b_4\}$$

ouvert $\bigcup$

$$Z' := \{((a_1, a_2, a_3, \infty), (b_1, b_2, b_3, 0))\} \subseteq (\mathbb{P}^1)^6$$

$a_i \neq a_j$, $a_i \neq \infty, 0$ $\quad$ $b_i \neq b_j$, $b_i \neq 0, \infty$

<u>Rq</u> : $(a,b) \in Z(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \langle \mu_a, \mu_b \rangle = \langle \mu_{ga}, \mu_{gb} \rangle$
$\forall g \in SL_2(\overline{\mathbb{Q}})$

$$\tilde{Z} = [(M \times M) \setminus \Delta] / SL_2 .$$

$\cup$

$$\tilde{Z}' = Z' / \{g \in SL_2 \mid g0 = 0, g\infty = \infty\} = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} [x_0 : x_1] = [t^{-1}x_0 : t x_1]$$

$$[1 : x] = [1 : t^2 x].$$

$$\longrightarrow \tilde{Z}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^5 \qquad \underset{\tilde{Z}^1}{\underset{\cap}{[(a,b)]}} = [a_1 : a_2 : a_3 : b_1 : b_2 : b_3]$$

bien définie ! $\qquad [a_1 : a_2 : a_3 : b_1 : b_2 : b_3] = [a:b]$

Th 1' ([P., Th 6.5], cf. exposé de Bac) :

$\exists\ c_0 > 0,\ d_0 \in \mathbb{R}$ tq $\forall (a,b) \in Z'(\bar{\mathbb{Q}})$

$$\langle \mu_a, \mu_b \rangle \geq c_0\, h([a:b]) + d_0.$$

$$\mu_a = \mu(E_a, \pi_a).$$

démo Th 1 : $\quad \tilde{Z}' \twoheadrightarrow (\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_4) \backslash \tilde{Z}. \qquad \square$

Th 2 ([P, Th. H], cf. exposé de Thomas) :

Pour tout $\alpha > 0$, il existe $C(\alpha) > 0$ tq

$\forall (a,b) \in Z'(\bar{\mathbb{Q}})$
$\forall F \subseteq \mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{Q}})$ fini

$$\Longrightarrow \langle \mu_a, \mu_b \rangle \leq \left(\alpha + \frac{C(\alpha)}{\# F}\right)\left(h([a:b]) + 1\right) + 4 \max\left(h_a(F), h_b(F)\right)$$

$$h_a(F) = h_{\mu_a}(F).$$

Thm. Il existe $\varepsilon, C > 0$ t.q.

$$\forall\ \underset{\text{sur } \bar{\mathbb{Q}}}{(E_1, \pi_1) \not\cong (E_2, \pi_2)} \qquad \#\{x \in \mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{Q}}) : \max h_{(E_i, \pi_i)}(x) \leq \varepsilon\} \leq C.$$

<u>démo.</u> Ops $(E_1,\pi_1) = (E_a,\pi_a)$ avec $(a,b) \in Z'(\overline{\mathbb{Q}})$.
$(E_2,\pi_2) = (E_b,\pi_b)$

$F \subseteq \{ x \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}}) : \max h_{(E_i,\pi_i)}(x) \leq \varepsilon \}$
fini.

$\varepsilon = \frac{\delta}{8}$ ← const du Th 1.

$$c_0\, h([a:b]) + d_0 \underset{\text{Th 1'}}{\leq} \langle \mu_a, \mu_b \rangle \underset{\text{Th2}}{\leq} 4\varepsilon + \left(\alpha + \frac{C(\alpha)}{\# F} \right) \left(h([a:b]) + 1 \right)$$

$\nearrow c_0$ $h \to \infty$

① $$\# |F| \leq C(\alpha) \left[\frac{c_0 h + d_0 - 4\varepsilon}{h+1} - \alpha \right]^{-1}$$

$h = h([a:b])$ si argument > 0.

$$\leq 4 \cdot \frac{C(c_0/2)}{c_0}. \qquad h([a:b]) \geq h_0.$$

$\alpha = c_0/2$

$$\frac{c_0 h_0 + d_0 - 4\varepsilon}{h_0 + 1} \geq \frac{3}{4} c_0 = \frac{3}{2}\alpha. \qquad \varepsilon \text{ quelconque}$$

← h_0 dépend de ε.

② $h([a:b]) \leq h_0$

$$\delta \underset{\text{Th 1'}}{\leq} \langle \mu_a, \mu_b \rangle \underset{\text{Th2}}{\leq} 4\varepsilon + \left(\frac{C(\alpha)}{|F|} + \alpha \right) (h_0 + 1).$$

$$\frac{\delta}{2(h+1)} = \frac{\delta - 4\varepsilon}{h+1} \leq \frac{C(\alpha)}{|F|} + \alpha$$

$\Updownarrow$ $\qquad \alpha = \frac{\delta}{4(h_0+1)}$

$$|F| \leq C(\alpha) \left[\frac{\delta}{2(h+1)} - \alpha \right]^{-1} \leq C(\alpha) \cdot \frac{4(h_0+1)}{\delta}. \qquad \square$$