I Immeubles de Gl_n

Sur un corps quelconque : l'espace des sous-groupes à un paramètre

Définitions

- k = corps

  E = k-espace vect. dim $d < +\infty$

- $\lambda : \mathbb{G}_m \to GL(E)$ sous-groupe à un paramètre

  $P(\lambda) = \{ g \in Gl(E) \ : \ \exists \lim\limits_{t \to 0} \lambda(t) \cdot g \cdot \lambda(t)^{-1} \in Gl(E) \}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m \arrow[r, "\lambda g \lambda^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & Gl(E) \\ \mathbb{A}^1 \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Fait : $P(\lambda)$ est un ss-gpe parabolique

démo : $e_1, -, e_d$ base de E t.q.

$$\begin{cases} \lambda(t) * e_i = t^{a_i} e_i & \forall i = 1, -, d \\ a_1 \geq \dots \geq a_d & \end{cases}$$

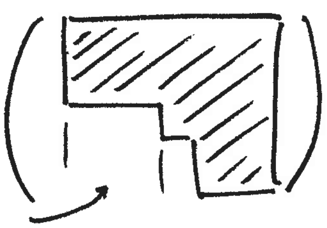
$$\lambda(t) \, g \, \lambda(t)^{-1} = \Big(\quad \Big)$$

en position (i,j) : $t^{a_i - a_j} g_{ij}$

coeff. de g de la base $e_1, -, e_d$

$\exists$ limite ssi $a_i < a_j \Rightarrow g_{ij} = 0$.

g est de la forme



$a_1 = \dots = a_r$

. □

déf. L'immeuble rationnel $B(E)_{rat}$ est le quotient de

$\underbrace{X_*(GL(E))}_{\text{ss-gpes à 1 par}} \times \mathbb{N}^*$ par la relation:

$(\lambda, r) \sim (\lambda', r')$ ssi $\exists\, g \in P(\lambda)(k)$ t.q. $(\lambda')^r = g(\lambda)^{r'} g^{-1}$.

On pose $\frac{\lambda}{r} :=$ classe de (λ, r).

Rmq: • $P(\frac{\lambda}{r}) := P(\lambda)$ bien déf.

• $GL(E,k) \curvearrowright B(E)_{rat}$ par conj. sur $X_*(GL(E))$

$$g * (\lambda, r) = (g\lambda g^{-1}, r).$$

• $\mathrm{Stab}_{GL(E,k)}(x) = P(\lambda)(k) \quad \forall x \in B(E)_{rat}$.

Appartements:

$T \subset GL(E)$ tore max $\longleftrightarrow$ $e_1, -, e_d$ base de E

$A(T)_{rat} = X_*(T) \otimes \mathbb{Q}$

$A(T) = X_*(T) \otimes \mathbb{R}$

Prop. L'application $GL(E,k) \times A(T)_{rat} \longrightarrow B(E)_{rat}$ est surjective et on a:

$g * x = g' * x' \iff \exists\, n \in N(T)$ t.q. $x' = n * x$ et $g^{-1} g' n \in P(x)$.

$N(T) = \mathrm{Norm}(T)$

démo. (Surjectivité): tout les ss-gpes à 1 par se diagonalisent.

(Défaut d'injectivité): découle du lemme

Lemme: $x \in A(T)_{rat}$, $g \in GL(E,k)$ t.q. $g * x \in A(T)_{rat}$.

$\Longrightarrow \exists\, n \in N(T)$ t.q. $n * x = g * x$.

Preuve du lemme : $Z = \mathrm{Cent}_{GL(E)}(\lambda) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} GL(E_n)$.

$E_n = \{v : \lambda(t) * v = t^n v\}$

$T,\ gTg^{-1} \subset Z$ tore max

$\overset{\text{théorème de conj.}}{\rightsquigarrow}$ $\exists\, z \in Z(k)$ t.q. $zTz^{-1} = gTg^{-1}$

$n := z^{-1}g$ convient ! $\square$

Métrique sur l'immeuble

$\|\cdot\|$ = produit scalaire W-invariant sur $X_*(T) \otimes \mathbb{R}$

groupe de Weyl $N(T)/T \simeq \mathfrak{S}_d$.

(**ex** : $X_*(T) \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^d$

base : $\lambda_i(t)(e_j) = \delta_{ij}\, t e_i$.

delta de Kronecker

$\|\lambda\| = \sqrt{\sum |a_i|^2}$

$\lambda = \lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_n^{a_n}$)

$x, y \in \mathcal{B}(E)_{\mathrm{rat}} \longrightarrow \exists\, \lambda \in X_*(T') \otimes \mathbb{R}$, $T' \subset GL(E)$ tore max

t.q. $x = y + \lambda$.

$\longrightarrow \exists\, g \in GL(E,k)$ t.q. $g * \lambda \in A(T)$

déf. $d(x,y) := \|g * \lambda\|$.

ne dépend pas de g : $\|\cdot\|$ W-invariant + lemme ds la prop. préc.

- $S \subset GL(E)$ tore max $\rightsquigarrow A(S) \subset \mathcal{B}(E)$, $A(S) = X_*(S) \otimes \mathbb{R}$

Prop. $\mathcal{B}(E) = \bigcup_{\substack{S \subset GL(E) \\ \text{tore max.}}} A(S)$.

Structure sympliciale

Drapeaux	Ss-gpes paraboliques	Facettes
$E_\bullet : 0 \neq E_1 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} E_r \neq E$	$P = \mathrm{Stab}(E_\bullet)$	$\Delta_P = \{x \in B(E) : P \subset P(x)\}$
Drapeaux complets	Ss-gpes de Borel	Chambres
base $e_1, \dots, e_d$ de E t.q. $\exists\ 0 < m_1 < \dots < m_r \neq d$ $E_i = \langle e_1, \dots, e_{m_i} \rangle$	$T \subset P$ tore max	Appartements contenant Δ_P $\Delta_P = \{x \in A(T) : \alpha(x) \geq 0\}$ $\Phi(T,P)$: racines de P par rapport à T.

Prop. $B(E)$ est un immeuble, i.e.

(1) deux facettes sont contenues ds un appartement bien choisi;

(2) étant donnés deux appartements $A(T)$, $A(T')$ il existe $g \in Gl(E,k)$ t.q.

- $g * A(T) = A(T')$;
- $g|_{A(T) \cap A(T')} = id$.

démo. (1) revient à dire que ds l'intersection de deux paraboliques il y a au moins un tore max. Ou encore, que deux drapeaux se "diagonalisent" sur la même base.

(2) $\quad Z = \mathrm{Cent}_{GL(E)}(T \cap T') = \prod_{\chi \in X^*(T\cap T')} GL(E_\chi).$

$E_\chi = \{v : t * v = \chi(t)\, v \ \forall t \in T \cap T'\}$
$\chi \in X^*(T \cap T')$.

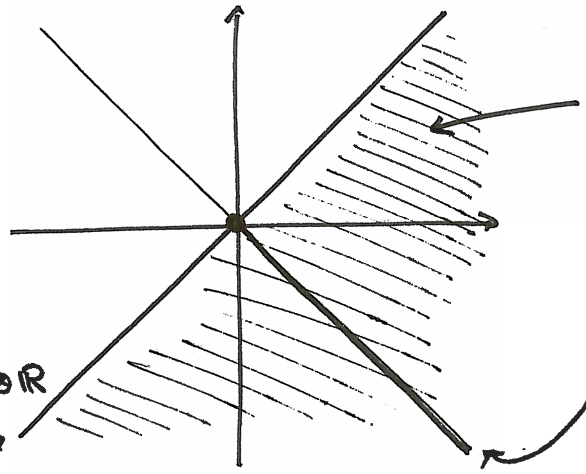
$T, T' \subset Z$
tore max

$\overset{\rightsquigarrow}{\text{théorème de conj.}}$ $\exists\, z \in Z(k)$ t.q. $\ ' = z T z^{-1}$

$\Longrightarrow$ z convient ! $\square$

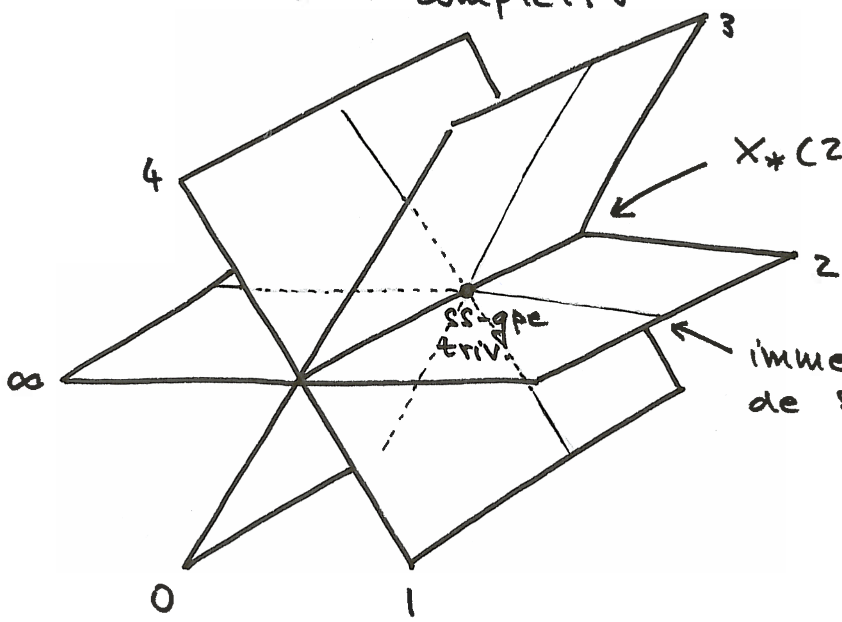
Exemples:

- $d = 2 \qquad X_*(T) \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ base $\lambda_i(t)(e_j) = \delta_{ij}\, t e_i$.



$\{\text{Chambres}\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Drapeaux}\\ \text{complets}\end{matrix}\right\} \cong \mathbb{P}^1(k)$

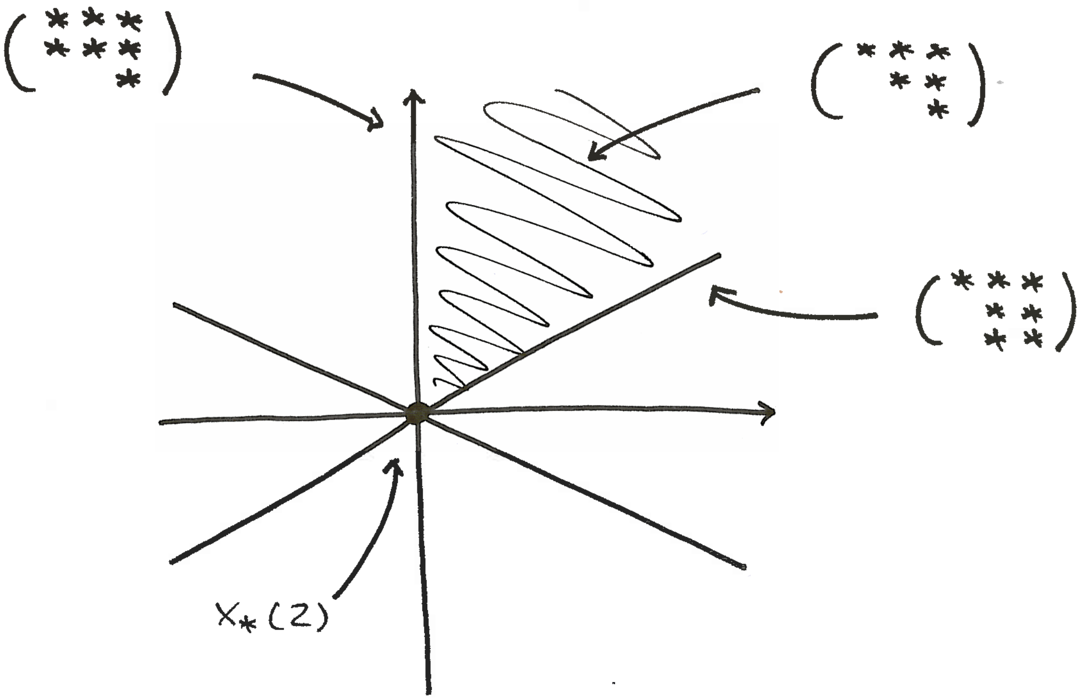
$k = \mathbb{F}_5$



• $d=3 \quad X_*(T \cap SL(F)) \otimes \mathbb{R} \quad \subset \quad X_*(T) \otimes \mathbb{R}$

$$\left\{ \sum x_i = 0 \right\} \quad \subset \quad \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}^2 \longleftarrow \text{base: } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



II Sur un corps valué : l'ensemble des normes

k = corps non-archimédien complet, loc. compact.

$\longrightarrow$ valuation discrète

$\longrightarrow$ k° = anneau des entiers noeth.

$\longrightarrow$ $\tilde{k}$ = corps résiduel fini.

ex : $k = \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_q((t))$.

E = k-espace vect. dim. $d < +\infty$.

déf : $\alpha : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ norme si

- $\alpha(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$
- $\alpha(\lambda x) = |\lambda|\, \alpha(x) \quad \forall \lambda \in k \quad \forall x \in E$
- $\alpha(x+y) \leq \max\{\alpha(x), \alpha(y)\}$.

$\mathcal{N}(E,k) = \{\text{normes sur } E\} \longleftarrow$ immeuble "élargi" de $GL(E)$

$\mathcal{B}(E,k) = \mathcal{N}(E,k)/\mathbb{R}_+^* \longleftarrow$ immeuble de BT de $GL(E)$, $SL(E)$, $PGL(E)$

ex : $\mathcal{E} \subset E$ réseau ($=$ /s-k°-module, type fini, $\mathcal{E} \otimes_{k^\circ} k = E$).

$$\alpha_{\mathcal{E}}(x) := \inf\{|\lambda| : x/\lambda \in \mathcal{E}, \lambda \in k^\times\}.$$

- $e_1, -, e_d$ base de $\mathcal{E}$

$$\alpha\left(\sum x_i e_i\right) = \max\{|x_i|\}. \longleftarrow \text{norme associée au réseau } \mathcal{E}.$$

- $\mathcal{E} = \{\alpha_{\mathcal{E}} \leq 1\}$.

ex : $e_1, -, e_d$ base de E, $\alpha_1, -, \alpha_d > 0$

$\alpha\left(\sum x_i e_i\right) = \max\{|x_i|\, \alpha_i\}$ est une norme.

⚠ α est associée à un réseau de $\mathcal{E}$

$\Updownarrow$

$\alpha_1, -, \alpha_d \in |k^\times|$.

Propriétés topologiques de base

$\alpha, \beta \in \mathcal{N}(E,k)$ $\qquad d(\alpha,\beta) := \sup_{x\neq 0} \left| \log \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right|.$

(distance sur $\mathcal{N}(E,k)$ ⇝ convergence uniforme sur $\mathbb{P}(E,k)$)

⚠ Ce n'est pas la distance de BT !

Prop : L'espace métrique $\mathcal{N}(E,k)$ est :

- complet : "les inégalités passent à la limite"
- loc. compact : k loc. compact + Ascoli-Arzelà
- contractile

Les segments :

Rappel : α = norme sur E ⇝ α^* norme sur E^*

$$\alpha^*(\varphi) = \sup_{x\neq 0} \frac{|\varphi(x)|}{\alpha(x)}.$$

bidualité : $\alpha^{**} = \alpha$.

$\alpha, \beta \in \mathcal{N}(E,k)$ $\qquad \alpha^{1-\varepsilon}\beta^{\varepsilon}$: pas une norme

$\varepsilon \in [0,1]$ $\qquad [\alpha,\beta]_\varepsilon$: norme duale à la norme

$$E^* \ni \varphi \longmapsto \sup_{x\neq 0} \frac{|\varphi(x)|}{\alpha(x)^{1-\varepsilon}\beta(x)^{\varepsilon}}.$$

exo :
- $d([\alpha,\beta]_\varepsilon, \alpha) = \varepsilon\, d(\alpha,\beta)$.
- $d([\alpha,\beta]_\varepsilon, \beta) = (1-\varepsilon)\, d(\alpha,\beta)$.

⚠ Ces propriétés ne caractérisent pas $[\alpha,\beta]_\varepsilon$!

Action de $GL(E)$

$$\begin{array}{ccc} GL(E,k) \times \mathcal{N}(E,k) & \longrightarrow & \mathcal{N}(E,k) \\ g \quad , \quad \alpha & \longmapsto & \alpha \circ g^{-1} =: g * \alpha \end{array}$$

action continue

$\mho(\alpha, k) = \{ g \in GL(E,k) : g * \alpha = \alpha \}$ /s-gpe compact.

- $\beta = \lambda \alpha \Rightarrow \mho(\beta, k) = \mho(\alpha, k)$
- $\alpha = \alpha_{\mathcal{E}} \Rightarrow \mho(\alpha_{\mathcal{E}}, k) = GL(\mathcal{E}, k^\circ)$

Prop. 1) $H \leq GL(E,k)$ /s-gpe compact

$\Longrightarrow$ il existe un réseau stable par H

2) $\mathcal{E}$ réseau $\Longrightarrow$ $GL(\mathcal{E}, k^\circ)$ agit trans. sur $\mathbb{P}(E,k)$

3) $\mho(\alpha, k)$ /s-gpe compact max

$\Longleftrightarrow$ $\alpha = \lambda \alpha_{\mathcal{E}}$ $\exists\, \mathcal{E}$ réseau

démo. 1) $\mathcal{E}$ réseau $\rightsquigarrow$ $\mathcal{E}^H = \sum_{h \in H} h \cdot \mathcal{E}$

- borné : $\exists \lambda \neq 0$ t.q. $\mathcal{E}^H \subset \lambda \mathcal{E}$
- type fini : /s-module d'un module noeth.
- $\mathcal{E}^H \otimes_{k^\circ} k = E$ (il contient $\mathcal{E}$).

2) OK

3) $(\Longrightarrow)$ $\exists\, \mathcal{E}$ stable par $\mho(\alpha, k)$

$\Rightarrow \mho(\alpha, k) \subset GL(\mathcal{E}, k^\circ)$

$(\Longleftarrow)$ Soit H un /s-gpe compact t.q. $H \supset GL(\mathcal{E}, k^\circ)$

Il existe $\mathcal{F}$ t.q. $H \subset GL(\mathcal{F}, k^\circ)$

fonctions $GL(\mathcal{E}, k^\circ)$-inv. $\quad \dfrac{\alpha_{\mathcal{F}}}{\alpha_{\mathcal{E}}} : \mathbb{P}(E, k^\circ) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

$\underset{GL(\mathcal{E},k^\circ) \curvearrowright \mathbb{P}(E,k) \text{ trans.}}{\Longrightarrow}$ $\dfrac{\alpha_{\mathcal{F}}}{\alpha_{\mathcal{E}}}$ const. $\square$

Diagonalisation de normes

Prop. $\alpha, \beta \in \mathcal{N}(E,k)$. Il existe une base $e_1, \dots, e_d$ de E telle que

$$\alpha\left(\sum x_i e_i\right) = \max\{|x_i|\,\alpha_i\}$$
$$\beta\left(\sum x_i e_i\right) = \max\{|x_i|\,\beta_i\} \qquad \alpha_i, \beta_i > 0 \quad \forall i.$$

Preuve. Par récurrence sur d.

$d = 0$: OK

$d-1 \Rightarrow d$: $\frac{\alpha}{\beta} : \underbrace{\mathbb{P}(E,k)}_{\text{compact!}} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue

- atteint max en $[e_n]$: $\dfrac{\alpha(e_n)}{\beta(e_n)} \geq \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad \forall x \neq 0 \qquad (*)$

- bidualité : $\alpha(e_n) = \sup\limits_{\varphi \neq 0} \dfrac{|\varphi(e_n)|}{\alpha^*(\varphi)}$

$$= \frac{|\varphi_n(e_n)|}{\alpha^*(\varphi_n)} \leq \frac{|\varphi_n(e_n)|}{|\varphi_n(x)|} \cdot \alpha(x)$$

$\exists\, \varphi_n$ par compacité de $\mathbb{P}(E^*,k)$

$$\alpha^*(\varphi) = \sup_{x \neq 0} \frac{|\varphi(x)|}{\alpha(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{|\varphi_n(x)|}{\alpha(x)} \leq \frac{|\varphi_n(e_n)|}{\alpha(e_n)} \qquad (**)$$

On considère : $F = \ker \varphi_n$, $\dim F = d-1$.

$$E \ni x = \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(e_n)} \cdot e_n + x' \qquad x' \in F.$$

$$\alpha(x) \leq \max\left\{ |\varphi_n(x)| \cdot \frac{\alpha(e_n)}{|\varphi_n(e_n)|},\ \alpha(x')\right\}$$

si égalité : OK par récurrence

$(**) \rightsquigarrow \alpha(x) \geq |\varphi_n(x)| \cdot \dfrac{\alpha(e_n)}{\varphi_n(e_n)} \Longrightarrow$ égalité même chose pour β : on utilise $(*)$ et $(**)$ pour conclure

<u>Cor</u> (Décomposition de Cartan)

$\mathcal{E}$ réseau, $e_1, -, e_d$ base de $\mathcal{E}$

$T(k)$ = matrices diag. sur cette base

$$\Longrightarrow \quad GL(E,k) = GL(\mathcal{E},k^\circ)\, T(k)\, GL(\mathcal{E},k^\circ).$$

<u>Preuve</u> : $g \in GL(E,k) \rightsquigarrow \beta := g * \alpha_{\mathcal{E}}$.

$\exists$ base de $\mathcal{E}$, $e_1', -, e_d'$, t.q. β se diag. sur cette base

$$\beta\left(\sum x_i e_i'\right) = \max\{\beta_i |x_i|\} \quad \text{avec } \beta_i \in |k^*|.$$

$$u \in GL(E,k) : \quad e_i \mapsto e_i' \quad \forall i \quad (\in GL(\mathcal{E},k^\circ)).$$

$\rightsquigarrow$ $u*\beta$ se diag sur $e_1, -, e_d$

$$\beta_i = |t_i| \qquad t = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_d \end{pmatrix} \in T(k)$$

$$\rightsquigarrow \quad \underset{\substack{\parallel \\ tug * \alpha_{\mathcal{E}}}}{tu * \beta} = \alpha_{\mathcal{E}} \Longrightarrow tug \in GL(\mathcal{E},k^\circ). \quad \square$$

Exemple ($d=2$):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}^\circ(E,k) & \hookrightarrow & \mathcal{B}(E,k) \\ \| & & \| \\ \{\text{réseaux}\}/k^\times & \longrightarrow & \mathcal{N}(E,k)/\mathbb{R}_+^\times \end{array}$$

On fixe un réseau $\mathcal{E} \subset E$.

$o \in \mathcal{B}^\circ(E,k)$ point associé à $\mathcal{E}$.

Pour tout $x \in \mathcal{B}^\circ(E,k)$ il existe un unique réseau $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{E}$ t.q. $[\mathcal{F}_x] = x$ satisfaisant aux propriétés équivalentes suivantes :

- $\mathcal{F}_x$ est maximal pour cette propriété
- $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{E}$ et $\varpi^{-1}\mathcal{F}_x \not\subset \mathcal{E}$

  ϖ uniformisante
- $\mathcal{E}/\mathcal{F}_x \simeq k^\circ/\varpi^N k^\circ$ avec $N \geq 0$.

Distance sur $\mathcal{B}(E,k)$:

$$d(o,x) = \inf_{[\alpha]=x} d(\alpha_{\mathcal{E}}, \alpha)$$

Si $x \in \mathcal{B}^\circ(E,k)$ alors $d(o,x) = d(\alpha_{\mathcal{E}}, \alpha_{\mathcal{F}_x}) = N$

$\mathcal{E}/\mathcal{F}_x \simeq k^\circ/\varpi^N k^\circ$

$$\begin{array}{ccc} \{x \in \mathcal{B}(E,k) : d(o,x) = 1\} & \xleftrightarrow{1:1} & \mathbb{P}(\mathcal{E}^*, \tilde{k}) \\ x & \longmapsto & \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{F}_x \simeq \tilde{k} \\ \ker(\mathcal{E} \twoheadrightarrow \tilde{k}) & \longleftarrow & \mathcal{E} \twoheadrightarrow \tilde{k} \end{array}$$

Dessin pour $k = \mathbb{Q}_2$: e_1, e_2 base de E

$$\{x : d(O,x) = 1\} \longleftrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$$

$$(e_1, 2e_2) \longleftrightarrow [e_2] = \infty$$

$$(2e_1, e_2) \longleftrightarrow [e_1] = 0$$

$$(e_1, 2(e_1+e_2)) \longleftrightarrow [e_1 + e_2] = 1$$