Sous-variétés

Exercice 1 (Caractérisations des sous-variétés)**.** Soient N une variété lisse de dimension n et $M \subset N$.

1. Soit $p \in M$, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
   (a) Redressement local.
   Il existe U voisinage ouvert de p dans N, V voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $f : U \to V$ tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.
   (b) Zéros d'une submersion.
   Il existe U voisinage ouvert de p dans N et une submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$.
   (c) Image d'un plongement.
   Il existe U voisinage ouvert de p dans N, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$ et une immersion $h : \Omega \to U$ telle que h soit un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.
   (d) Graphe.
   Il existe une carte (U, φ) autour de p, un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ et une application $F : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ telle que $\varphi(U \cap M)$ soit le graphe de F.
2. On suppose que ces conditions sont satisfaites pour tout $p \in M$. Montrer que M peut être munie d'une structure de variété lisse telle que l'inclusion $M \subset N$ soit un plongement.
3. Montrer que M est une sous-variété de dimension m de N si et seulement si ces conditions sont satisfaites pour tout $p \in M$.

Remarque. La notion de sous-variété semble a priori plus restrictive, mais le théorème de Whitney affirme que toute variété lisse raisonnable admet un plongement dans $\mathbb{R}^N$.

Exercice 2 (Espace tangent à une sous-variété)**.** Pour chacune des caractérisations de sous-variété données dans l'exercice 1, décrire l'espace tangent $T_pM \subset T_pN$.

Exercice 3 (Exemples de (sous-)variétés)**.**
1. Redémontrer que la sphère euclidienne $\mathbb{S}^n$ est une variété et décrire ses espaces tangents.
2. Montrer que $\mathbb{T}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \forall i\, |z_i| = 1\}$ est une variété et décrire ses espaces tangents.
3. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des variétés et décrire leurs tangents en I_n.

Remarque. Ce sont ce que l'on appelle des *groupes de Lie* : des groupes munis d'une structure de variété telle que les opérations de groupes soient lisses.

Exercice 4 (Image d'une immersion injective)**.**
1. Soit $h : M \to N$ une immersion injective propre (i.e. l'image réciproque d'un compact de N est compacte). Montrer que h est un plongement.
2. Soit $h : t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, t\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$ de $]-\infty; 1[$ dans $\mathbb{R}^2$. On note $M = h\left(]-\infty; 1[\right)$. L'application h est-elle une immersion injective ? Est-elle propre ? Est-ce un plongement ? Est-ce que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?
3. Soit $i :]-1; 1[\to \mathbb{R}$ l'inclusion canonique. Montrer que i est une immersion injective. Est-elle propre ? Est-ce un plongement ?

4. Soit $h : M \to N$ une immersion injective telle que $h(M)$ soit une sous-variété de N. Montrer que h est un plongement.

Exercice 5 (Plongement de Veronese)**.** On rappelle que l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est le quotient de $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ par la relation de colinéarité. Si $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on dit $(x_0 : \ldots : x_n)$ sont les *coordonnées homogènes* de la droite engendrée par x.

Soit $h : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^5$ définie par $h(x : y : z) = (x^2 : y^2 : z^2 : xy : yz : zx)$.

1. Vérifier que h est bien définie.
2. Montrer que h est un plongement.

Exercice 6 (Points fixes d'involutions)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application lisse telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$. On pose $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = x\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Fix}(f)$, $(d_x f)^2 = \mathrm{Id}$.
2. On suppose que $f(0) = 0$. On définit $h = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + d_0 f \circ f)$. Montrer que h est un difféomorphisme entre voisinages de 0. Montrer que $h \circ f = d_0 f \circ h$.
3. En déduire que $\mathrm{Fix}(f)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
4. Que dire de $\mathrm{Fix}(f)$ lorsque $f \circ \cdots \circ f = \mathrm{Id}$ (itérée k-ième) ?

Exercice 7 (Variété d'incidence)**.** Soient M une variété lisse et V un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{C}^\infty(M)$ qui contient les constantes.

1. Montrer que $\Sigma = \{(f, x) \in V \times M \mid f(x) = 0\}$ est une hypersurface de $V \times M$ et décrire l'espace $T_{(f,x)}\Sigma$.
2. Dans cette question on suppose que $M = \mathbb{R}$.
   (a) Soit $(f, x) \in \Sigma$ tel que $f'(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe U et V, des voisinages ouverts de f et x respectivement, et $\varphi : U \to V$ lisse telle que $\varphi(f) = x$ et $g(\varphi(g)) = 0$ pour tout $g \in U$.
   (b) En déduire que, dans $\mathbb{R}_d[X]$, les racines simples d'un polynôme sont des fonctions lisses des coefficients.
   (c) Que se passe-t-il au niveau des racines multiples ?
3. Soient p_V et p_M les projections de Σ sur V et M.
   (a) Montrer que p_M est une submersion.
   (b) Déterminer les points critiques de p_V, puis ses valeurs critiques.
   (c) Montrer que l'ensemble des $f \in V$ tels que $f^{-1}(0)$ est une hypersurface de M est de mesure pleine.