Sous-variétés (suite)

Exercice 1 (Transversalité)**.** Soient $\mathcal{C}$ le cylindre de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x-1)^2 + y^2 = 1\right\}$$

et S_r la sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$. Pour quelles valeurs de r l'intersection $\mathcal{C} \cap S_r = M_r$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? Que se passe-t-il dans les cas critiques ?

Exercice 2. Soient M, N et P trois variétés différentiables, $F : M \to P$ lisse et $G : N \to P$ une submersion. On pose

$$Q = \{(x,y) \in M \times N \mid F(x) = G(y)\},$$

montrer que Q est une variété et calculer sa dimension.

Exercice 3 (Matrices de rang fixé)**.** Soit V_r l'ensemble des matrices réelles de taille $m \times n$ de rang exactement r. On veut montrer que V_r est une sous-variété de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rg}(M) \geqslant r\}$ est un ouvert.
2. Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ par blocs où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer que $M \in V_r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.
3. En déduire que V_r est une variété de dimension $(m+n-r)r$.

Exercice 4. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m avec $2m < n$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| < \varepsilon$ et $(M+v) \cap M = \emptyset$. Que se passe-t-il pour $n \leqslant 2m$?

Exercice 5. Existe-t-il une variété M compacte, sans bord, de dimension $n > 0$ qui s'immerge dans $\mathbb{R}^n$?