Algèbre multilinéaire

Exercice 1 (Formes multilinéaires)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension n et $e = (e_i)$ une base de E.

1. Soit $\alpha \in (E^*)^{\otimes k}$, décomposer α dans la base de $(E^*)^{\otimes k}$ associée à e.
2. Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension m, expliciter un isomorphisme naturel entre $E^* \otimes F$ et $\mathcal{L}(E, F)$.
3. Soient $f = (f_j)$ une base de F et $L : E \to F$ linéaire de matrice $M = (m^i_j)$ dans les bases e et f, quelle est la matrice de L^* dans les bases duales e^* et f^* ?
4. Soit $L : E \to E$ de matrice $A = (a^i_j)$ dans e et $L' : F \to F$ de matrice $B = (b^k_l)$ dans f, quelle est la matrice de $L \otimes L' : E \otimes F \to E \otimes F$ définie par $u \otimes v \mapsto L(u) \otimes L'(v)$?
5. On définit la contraction $c : E \otimes E^* \to \mathbb{R}$ par $c(e_i \otimes e^j) = \delta^j_i$. Soit $L : E \to E$ linéaire, reconnaitre $c(L)$.

Exercice 2 (Changements de base)**.** Soient $e = (e_i)$ et $f = (f_i)$ deux bases d'un espace vectoriel E et $M = (m^i_j)$ la matrice de passage de e vers f, (i.e. si $\sum v^i e_i = \sum w^i f_i$ alors $w^i = \sum m^i_j v^j$). On note $M^{-1} = (n^i_j)$.

Le changement de base de e vers f induit naturellement un changement de coordonnées dans $E \otimes E$ et dans E^*, les décrire. Décrire le changement de coordonnées induit dans $E \otimes \cdots \otimes E \otimes E^* \otimes \cdots \otimes E^*$.

Exercice 3 (Produit extérieur et déterminant)**.**

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\alpha^1, \ldots, \alpha^k \in E^*$ avec $k \leqslant n$. Montrer que
$$\mathrm{Alt}(\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \alpha^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\sigma(k)}.$$
2. Montrer que
$$\mathrm{Alt}(\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^k) = \mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}(\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^l) \otimes \mathrm{Alt}(\alpha^{l+1} \otimes \cdots \otimes \alpha^k)\right).$$
3. En déduire que $(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\alpha^j(v_i))$.
4. Conclure que si (e_i) est une base de E et (e^i) sa base duale, alors la famille
$$\left\{ e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \;\middle|\; i_1 < \cdots < i_k \right\}$$
est une base de $\bigwedge^k E^*$, et donner la décomposition sur cette base d'une forme k-linéaire alternée ω.
5. Vérifier que le produit extérieur est associatif et anticommutatif.

Exercice 4 (Algèbre extérieure)**.**

1. Existe-t-il une forme multilinéaire alternée α sur un espace vectoriel E tel que $\alpha \wedge \alpha \neq 0$?
2. Existe-t-il une forme alternée non nulle qui commute à toutes les autres ?

Exercice 5 (Tiré-en-arrière)**.** Soient E et F deux espaces vectoriels munis de bases (e_i) et (f_j). Soient $L : E \to F$ linéaire de matrice $M = (m^i_j)$ et $\omega = \sum \omega_J f^J$, où la somme porte sur les multi-indices $J = (j_1, \ldots, j_k)$ avec $j_1 < \cdots < j_k$ et $f^J = f^{j_1} \wedge \cdots \wedge f^{j_k}$.

1. Remarquer que pour toutes formes alternées α et β, on a $L^*(\alpha \wedge \beta) = L^*(\alpha) \wedge L^*(\beta)$.

2. Calculer $L^*(\omega)$ dans la base (e^I).

Exercice 6 (Formes décomposables ou pas)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension n, une forme k-linéaire alternée est dite décomposable si elle s'écrit comme produit extérieur de k formes linéaires. Sinon on dit qu'elle est indécomposable.

1. Montrer que les formes linéaires et n-linéaires alternées sont toujours décomposables.
2. Soit $\alpha \in E^* \setminus \{0\}$, montrer qu'une forme k-linéaire alternée $\omega \neq 0$ est divisible par α (i.e. s'écrit comme $\alpha \wedge \beta$) si et seulement si $\alpha \wedge \omega = 0$.
3. Si α, β, γ et δ sont des formes linéaires indépendantes, montrer que $\omega = \alpha\wedge\beta+\gamma\wedge\delta$ est indécomposable.
4. Montrer qu'une forme $(n-1)$-linéaire alternée est toujours décomposable (on suppose $n > 1$). On pourra considérer l'application

$$\begin{aligned} \phi_\omega : E^* &\to \bigwedge^n E^*. \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge \omega \end{aligned}$$

Exercice 7 (Formes bilinéaires alternées)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension n et ω une forme bilinéaire alternée.

1. Montrer qu'il existe (e^i) une base de E^* telle que

$$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + \cdots + e^{2p-1} \wedge e^{2p},$$

   où $n - 2p$ est la dimension de $\ker(\omega) = \{x \in E \mid \omega(x, .) = 0\}$.
2. Montrer que p est le plus petit entier tel que $\omega^{p+1} = 0$.