Fibrés vectoriels

Exercice 1 (Sections globales)**.** Un fibré vectoriel $E \to M$ de rang r a-t-il toujours des sections globales non nulles ? Décrire les sections du fibré trivial $M \times \mathbb{R} \to M$.

Exercice 2. Écrire les fonctions de transitions pour le fibré tangent de $\mathbb{S}^n$ et les trivialisations données par les projections stéréographiques de pôle nord et sud.

Exercice 3 (Référentiels)**.**

1. Soit $L \to M$ un fibré en droites. Donner un critère de trivialité portant sur ses sections globales ?
2. Le tangent de $\mathbb{S}^1$ est-il trivial ?
3. Trouver un critère de trivialité du même type pour un fibré $E \to M$ de rang $r > 1$.
4. Le tangent du tore $\mathbb{T}^n$ est-il trivial ?

Exercice 4 (Sous-fibrés)**.** Soient $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel de rang r, on dit que $V \subset E$ est un sous-fibré de E de rang k si, au voisinage de tout point, il existe une trivialisation de E telle que :

$$\pi^{-1}(U) \cap V \simeq U \times \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right) \subset U \times \mathbb{R}^r.$$

1. Vérifier qu'un sous-fibré vectoriel est un fibré vectoriel.
2. Soit $M \subset N$ une sous-variété. Montrer que $TM \to M$ est un sous-fibré de $i^*(TN)$, où $i : M \to N$ est l'injection canonique.

Exercice 5 (Fibré tautologique)**.** On note $J = \{(D, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in D\}$.

1. Montrer que $E \to \mathbb{RP}^n$ est un fibré en droites. Est-il trivial ?
2. On note $L \to \mathbb{RP}^n$ le fibré dual de J. Soit P un polynôme homogène de degré d en $n+1$ variables. Montrer que P définit naturellement une section globale de $L^{\otimes d}$.

Exercice 6 (Fibré normal)**.** On munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété. On appelle fibré normal de M l'ensemble $NM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_xM^\perp\}$.

1. Vérifier que NM est un fibré vectoriel sur M et donner sa dimension.
2. Le fibré normal de $\mathbb{S}^{n-1}$ est-il trivial ?
3. Le fibré normal d'une hypersurface est-il trivial ?
4. Montrer que le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^n \to M$ est isomorphe à $TM \oplus NM$.

Exercice 7 (Fibrés sur le cercle)**.** Combien existe-t-il de fibrés vectoriels $E \to \mathbb{S}^1$ de rang $r > 0$, à isomorphisme près ?