Champs de vecteurs, dérivée de Lie

Exercice 1 (Dérivée de Lie)**.** Soient M une variété, $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

1. Montrer que $\mathcal{L}_X f = df \cdot X$.
2. Montrer que $\mathcal{L}_X(fY) = f\mathcal{L}_X Y + (df \cdot X)Y$.
3. Soient S et T deux champs de tenseurs sur M, montrer que
$$\mathcal{L}_X(S \otimes T) = (\mathcal{L}_X S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_X T).$$
4. Soient $\omega \in \Omega^1(M)$, montrer que
$$\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X \omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_X Y).$$

Exercice 2 (Crochet de Lie)**.**
1. Soient X et $Y \in \Gamma(TM)$, montrer que $[X, Y]$ vérifie bien la règle de Leibniz (i.e. est une dérivation et définie bien un champ de vecteurs).
2. Vérifier que le crochet de Lie est bilinéaire, antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$
En déduire que $\mathcal{L}_X([Y, Z]) = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$.
3. Soit φ un difféomorphisme. Montrer que $\varphi_*([X, Y]) = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$.
4. Soient f et g deux fonctions lisses sur M, montrer que
$$[fX, gY] = f(X \cdot g)Y - g(Y \cdot f) + fg[X, Y].$$

Exercice 3 (Redressement du flot)**.** Soient M une variété fermée et $X \in \Gamma(TM)$. Soit $a \in M$ tel que $X(a) \neq 0$, montrer qu'il existe des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ autour de a telles que $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

Les orbites sont-elles des sous-variétés ?

Exercice 4 (Transitivité du groupe des difféomorphismes)**.**
1. Soient a et $b \in \mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = b$ et $f \equiv \mathrm{Id}$ hors de $\mathbb{B}$.
2. Soit M une variété connexe, montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M.
3. Cette action est-elle k-transitive ($k \in \mathbb{N}^*$) ?
4. Que se passe-t-il si M n'est plus supposée connexe ?

Exercice 5 (Retraction de sous-niveaux)**.** Soit M une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, on note $M_a = \{x \in M \mid f(x) \leqslant a\}$. Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $M \cap f^{-1}([a, b])$ ne contienne pas de point critique de $f_{/M}$. Montrer que M_a et M_b sont difféormorphes.